CLASSICITÉ DE FORMES MODULAIRES SURCONVERGENTES

par

Stéphane Bijakowski, Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Résumé. — Nous généralisons le critère de classicité de formes modulaires surconvergentes sur les courbes modulaires dû à Coleman à certaines variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à des groupes réductifs non ramifiés sur $\mathbb{Q}_p$. Notre démonstration s'inspire de la méthode de prolongement analytique de Buzzard et Kassaei.

Abstract. — We generalize Coleman classicity criterion for overconvergent modular forms on modular curves to the case of some PEL Shimura variety of type (A) or (C) associated to a reductive group unramified over $\mathbb{Q}_p$. Our demonstration is inspired by the analytic continuation method of Buzzard and Kassaei.

Table des matières

Hida dans le cas cas ordinaire et Coleman dans le cas général [**Co**] ont prouvé que toute forme modulaire surconvergente f de poids k, propre pour un certain opérateur de Hecke U en p[i], de valeur propre α satisfaisant $k > 1 + v(\alpha)$ est un forme classique sur la courbe modulaire de niveau Iwahorique en p. Kassaei [**Ka**] a trouvé une autre démonstration du théorème de Coleman basée sur des travaux antérieurs de Buzzard [**Bu**]. Ces travaux de Buzzard élucident la dynamique de l'opérateur U agissant sur la courbe modulaire rigide analytique de niveau iwahorique en p. Plus précisément, Buzzard a démontré que les itérations successives de l'opérateur U tendaient à accumuler le tube supersingulier vers des voisinages stricts arbitrairement petits du tube multiplicatif. Comme les formes surconvergentes sont définies sur de tels voisinages stricts, l'équation fonctionnelle $f = U(f)/\alpha$ permet de prolonger

i. souvent noté U_p

analytiquement f au tube supersingulier dès que α est non nul. Restait à étendre f sur le tube ordinaire étale en utilisant l'hypothèse $k > 1 + v(\alpha)$.

La théorie du sous-groupe canonique de Lubin et Katz permet de décomposer l'opérateur U au voisinage du tube ordinaire étale en une somme de deux opérateurs U^{good} et U^{bad}. Dans cette décomposition, U^{good} paramètre les supplémentaires du sous-groupe universel qui ne rencontrent pas le sous-groupe canonique et U^{bad} l'unique supplémentaire égal au sous-groupe canonique. Les supplémentaires paramétrés par U^{good} ont un degré au sens de Fargues [**Fa**] strictement inférieur à 1 alors que le sous-groupe canonique paramétré par U^{bad} a un degré supérieur à $1 - \varepsilon$ où ε peut être choisi arbitrairement petit si l'on s'autorise à rétrécir le voisinage strict. Grâce à cela, il est facile de prouver que l'image par U^{good} de tout voisinage strict du tube ordinaire étale est un voisinage strict du tube ordinaire multiplicatif et qu'en revanche, U^{bad} stabilise le tube ordinaire étale. Kassaei a alors introduit d'ingénieuses séries définies sur des voisinages stricts du tube ordinaire étale grâce aux opérateurs U^{good} et U^{bad}. Sous l'hypothèse $k > 1 + v(\alpha)$, ces séries convergent sur le tube ordinaire étale et Kassaei a de plus démontré un lemme de géométrie rigide permettant de recoller ses séries avec le prolongement analytique sur le tube supersingulier obtenu par Buzzard. Il en a conclu que la forme surconvergente f est définie sur toute la courbe modulaire rigide lorsque $k > 1 + v(\alpha)$. La classicité de f est alors une conséquence simple du principe « GAGA » en géométrie rigide.

Des travaux récents comme [**AIP**] construisent des variétés de Hecke en utilisant les formes surconvergentes. Pour reconnaître les points classiques de ces variétés de Hecke, il est important de prouver des variantes du théorème de Coleman pour des variétés de Shimura plus complexes que les courbes modulaires. Plusieurs travaux ont été effectués récemment concernant les variétés de Hilbert. On peut ainsi citer [**Sa**] lorsque p est totalement décomposé dans le corps totalement réel associé, [**Ti**], [**TX**] et [**PS**] lorsque p est non ramifié, et [**Jo**] dans le cas général. Citons également le cas des variétés de Siegel de genre deux [**Pi**], qui contient en germe certaines idées de ce travail. Dans cet article, nous démontrons un théorème de classicité pour des variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à des groupes réductifs non ramifiés sur $\mathbb{Q}_p$. Nous obtenons le théorème suivant (voir le théorème **5.3.1** et la remarque ci-dessous pour des énoncés plus précis).

Théorème. — *Soit p un nombre premier et X_{Iw} une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau iwahorique en p associée à un groupe réductif non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$. On suppose les propriétés* ***1.1.1*** *satisfaites. Soit f une forme modulaire surconvergente de poids κ sur X_{Iw}. Supposons f propre pour une famille $(U_i)_i$ d'opérateurs de Hecke de niveau iwahorique en p décrits dans le paragraphe* ***2.3****. Supposons que les valeurs propres correspondantes $(\alpha_i)_i$ sont non nulles et que κ est grand devant la famille $(v(\alpha_i))_i$ de leurs valuations au sens de l'hypothèse* ***4.5.1****. La forme modulaire f est classique.*

Le nombre d'opérateurs U_i considérés est égal au nombre de facteurs simples du groupe sur $\mathbb{Q}_p$ associé à X_{Iw}. L'hypothèse **4.5.1** de comparaison entre poids et pente est très explicite et fait intervenir la dimension de X_{Iw}.

Remarque. — Précisons l'hypothèse poids-pente **4.5.1** dans deux cas particuliers. Supposons que X_{Iw} est la variété de Siegel associée au groupe GSp_{2g} sur un corps totalement réel F dans lequel p est inerte, avec $g \geq 1$. Le poids de f est un vecteur $(k_{\sigma,1} \geq \cdots \geq k_{\sigma,g})$ de $(\mathbb{Z}^g)^{\Sigma}$, où Σ est l'ensemble des plongements de F dans $\mathbb{R}$. Puisque GSp_{2g} est simple, nous ne considérons qu'un opérateur de Hecke U en p. Soit α la valeur propre de U agissant sur f. La condition poids-pente est alors $\inf_{\sigma \in \Sigma} k_{\sigma,g} > v(\alpha) + dg(g+1)/2$, où d est le degré de F.

Soit F_0 un corps totalement réel de degré d, et F une extension CM de F_0. On suppose que p est inerte dans F_0, et se décompose dans F. Soient a, b des entiers. Supposons que X_{Iw} est une variété de Shimura associée à un groupe unitaire sur F de signature $((a,b),\dots,(a,b))$ à l'infini. Le poids de f est un vecteur $(k_{\sigma,1} \geq \cdots \geq k_{\sigma,a}; l_{\sigma,1} \geq \cdots \geq l_{\sigma,b})$ de $(\mathbb{Z}^{a+b})^\Sigma$, où Σ est l'ensemble des plongements de F_0 dans $\mathbb{R}$. Là aussi, un seul opérateur de Hecke U entre en jeu. Soit α la valeur propre de U agissant sur f. La condition poids-pente est $\inf_{\sigma\in\Sigma}(k_{\sigma,a}+l_{\sigma,b}) > v(\alpha)+dab$.

Nous démontrons le théorème grâce à une généralisation naturelle de la méthode de Buzzard et Kassaei. Nous commençons par étudier la dynamique des opérateurs de Hecke U_i et prouver qu'ils accumulent une certaine zone $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ de la variété rigide analytique associée à X_{Iw} vers des voisinages stricts du tube ordinaire multiplicatif (proposition **3.2.2**). Cela permet aussitôt de prolonger f à $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ en n'utilisant que l'hypothèse de pente finie (proposition **4.2.1**). La principale différence entre le cas des variétés de Shimura générales et celui des courbes modulaires est que le complémentaire de $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ ne se réduit pas à une union de tubes ordinaires.

On peut néanmoins découper le complémentaire de telle manière que sur chaque partie S on peut décomposer l'opérateur de Hecke U_i en deux opérateurs :

$$U_i \;=\; U_i^{good} \;+\; U_i^{bad}$$

où U_i^{good} correspond aux supplémentaires du sous-groupe universel de degré < 1 et U_i^{bad} à ceux de degré $\geqslant 1$. Comme dans le cas des courbes modulaires, l'opérateur U_i^{good} envoie S dans $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$. Si S est stable par U_i^{bad}, la norme des itérés successifs de l'opérateur U_i^{bad} tend vers zéro lorsque l'hypothèse **4.5.1** est satisfaite. Il est alors facile de définir des séries de Kassaei et de construire une forme modulaire sur S qui approche le prolongement voulu de f. Néanmoins, il ne semble malheureusement pas possible de recouvrir le complémentaire de $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ par de telles zones stables par U_i^{bad}. La série de Kassaei à l'ordre 1 est définie facilement à l'aide de l'opérateur U_i^{good}. Pour pourvoir définir la série de Kassaei à l'ordre 2, il est nécessaire de disposer d'une décomposition de U_i sur $U_i^{bad}(S)$. Pour tout entier N, nous recouvrons donc le lieu où f n'est pas défini par des ensembles S_k, avec une décomposition explicite de l'opérateur U_i^N sur chaque S_k. Cela nous permet de définir la série de Kassaei à l'ordre N. Il faut ensuite recoller les fonctions obtenues, ce qui permettra d'étendre f à toute la variété rigide (une difficulté étant que le recouvrement construit n'est pas admissible).

Il nous faut enfin algébriser la forme modulaire obtenue sur la variété rigide analytique. Si l'on exclut le cas des courbes modulaires, nous démontrons un principe de Köcher (corollaire **5.2.3**) qui implique que toute forme modulaire rigide s'étend aux compactifications toroïdales. Ce principe résulte de l'existence de compactifications toroïdales de variétés de Shimura PEL en leurs places de mauvaise réduction de niveau iwahorique. Il est alors aisé de conclure en appliquant un théorème « GAGA » en géométrie rigide.

Nous remercions Laurent Fargues, Colin Guillarmou, Tom Haines, Robert Kottwitz, Bao Châu Ngô et Liang Xiao pour d'intéressantes discussions, Alain Genestier et Jacques Tilouine pour avoir organisé un groupe de travail sur le prolongement analytique en 2009 et le rapporteur pour sa relecture attentive et ses nombreux commentaires qui nous ont permis d'éviter plusieurs erreurs. Les auteurs ont été subventionnés par les programmes ANR-BLAN-0114 et ANR-14-CE25-0002. .

Remarque. — Une première version de cet article a été soumise par Pilloni et Stroh sous le titre « Surconvergence et classicité : le cas déployé ». Durant le temps où cet article était référé, Bijakowski a effectué sa thèse de doctorat sous la direction de Stroh, son sujet étant de trouver une généralisation conjointe des articles « Surconvergence et classicité : le cas déployé » et « Surconvergence et classicité : le cas Hilbert » de Pilloni-Stroh. Ses travaux ont notamment donné naissance à l'article « Classicité de formes modulaires surconvergentes » prépublié sur Arxiv. Bijakowski a à la fois simplifié et généralisé les méthodes des deux articles de Pilloni-Stroh.

Les éditeurs ont alors demandé aux auteurs de réécrire l'article originel selon la méthode de Bijakowski, en l'incluant dans les auteurs. L'article présenté ici est le résultat de cette réécriture. Il reprend essentiellement la prépublication Arxiv de Bijakowski. P. et S. aimeraient donc insister sur le fait que la plupart des idées et méthodes présentées dans cet article sont dues à B.

1. Formes surconvergentes sur les variétés de Shimura

1.1. Données PEL de type (A) et (C). — Introduisons le plus brièvement possible les données d'algèbre linéaire considérées dans cet article. La référence standard est [**Ko**]. Les notations introduites dans cette partie seront librement réutilisées dans la suite. Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple munie d'une involution positive $\star$. On note F le centre de B et F_0 le sous-corps de F fixe par l'involution $\star$. L'extension F_0 de $\mathbb{Q}$ est totalement réelle. Notons d son degré. Le corps F est soit égal à F_0 soit une extension quadratique imaginaire de F_0. On dit que $(B,\star)$ est de type (A) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

i. $[F : F_0] = 2$.

ii. Pour tout plongement de F_0 dans $\mathbb{R}$, on a $B \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\star$ induit l'involution $A \mapsto \bar{A}^t$.

iii. Pour tout plongement de F_0 dans $\mathbb{C}$, on a $B \otimes_{F_0} \mathbb{C} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\star$ induit l'involution $(A, B) \mapsto (B^t, A^t)$.

On dit que $(B,\star)$ est de type (C) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

i. $F = F_0$ et pour tout plongement de F dans $\mathbb{R}$, $B \otimes_F \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\star$ induit l'involution $A \mapsto A^t$.

ii. $F = F_0$ et pour tout plongement de F dans $\mathbb{C}$, $B \otimes_F \mathbb{C} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\star$ induit l'involution $A \mapsto A^t$.

On supposera dans la suite de l'article que $(B,\star)$ est de type (A) ou (C). On se donne un B-module anti-hermitien non dégénéré $(U_{\mathbb{Q}}, <\,,>)$. En particulier, la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $U_{\mathbb{Q}}$ est paire. On note $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_B(U_{\mathbb{Q}}, <\,,>)$ le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ des similitudes symplectiques B-linéaires de $U_{\mathbb{Q}}$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(U_{\mathbb{Q}}) \times \mathbb{G}_m$.

Soient $\tau_1, ..., \tau_d$ les plongements réels de F_0. Si $F \neq F_0$, on note $\sigma_1, \bar{\sigma}_1, ..., \sigma_d, \bar{\sigma}_d$ les plongements de F dans $\mathbb{C}$ indexés de telle sorte que σ_i et $\bar{\sigma}_i$ soient conjugués sous $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et que $\sigma_i|_{F_0} = \tau_i$ pour tout $i \leqslant d$.

Supposons que B soit de type (A). Soit $1 \leqslant i \leqslant d$. Au choix de σ_i correspond un isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$. Posons $B_i = B \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $U_i = U_{\mathbb{Q}} \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R}$. D'après l'équivalence de Morita, on a $U_i \simeq \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} W_i$ où B_i agit sur le premier facteur et où W_i est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La structure anti-hermitienne sur U_i en induit une sur W_i. On note (a_{τ_i}, b_{τ_i}) sa signature (si on avait pris l'isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ correspondant au choix de

$\bar{\sigma}_i$, on aurait obtenu la signature (b_{τ_i}, a_{τ_i})). Le groupe réel $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ est donc isomorphe au groupe

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^{d} \mathrm{U}(a_{\tau_i}, b_{\tau_i})\right)$$

où $\mathrm{U}(a_{\tau_i}, b_{\tau_i})$ est le groupe des isomorphismes unitaire relatives à la forme hermitienne de signature (a_{τ_i}, b_{τ_i}). On remarquera d'ailleurs que $a_{\tau_i}+b_{\tau_i}$ ne dépend pas de i et vaut $\frac{1}{2nd}\dim_{\mathbb{Q}} U_{\mathbb{Q}}$. Supposons que B est de type (C). Posons $B_i = B \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ est isomorphe au groupe

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^{d} \mathrm{Sp}_{2a_i}\right)$$

où $a_i = \frac{1}{2nd}\dim_{\mathbb{Q}} U_{\mathbb{Q}}$ est indépendant de i et par convention, le groupe symplectique est associé à la matrice antidiagonale et antisymétrique usuelle.

Notons $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_m$ le tore de Deligne et donnons-nous un morphisme $h : \mathbb{S} \to \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ comme dans [**Ko**, par. 4]. Ce morphisme définit une structure complexe sur $U_{\mathbb{R}}$. Notons $U^{1,0}$ le sous-espace de $U_{\mathbb{C}}$ où $h(i)$ agit par multiplication par i. L'espace $U^{1,0}$ est un $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-module. Supposons que B est de type (A). On a un isomorphisme $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \oplus_{i=1}^{d}\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ relatif à l'isomorphisme $F \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ correspondant au choix de σ_i. Le $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-module $U^{1,0}$ est isomorphe à

$$\prod_{i=1}^{d} (\mathbb{C}^n)^{a_{\tau_i}} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_{\tau_i}}$$

où $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ agit à travers $B_i \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur $(\mathbb{C}^n)^{a_{\tau_i}} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_{\tau_i}}$ avec l'action standard sur le premier facteur et l'action conjuguée sur le second facteur. Supposons que B est de type (C). On a un isomorphisme $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \oplus_{i=1}^{d}\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et le module $U^{1,0}$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{d}(\mathbb{C}^n)^{a_i}$.

Soit $\det_{U^{1,0}}$ le déterminant du $\mathcal{O}_B$-module $U^{1,0}$ dans le sens de [**Ko**, par. 5]. C'est un polynôme à coefficient dans un corps de nombres minimal pour cette propriété E appelé corps réflexe. On se donne un ordre $\mathcal{O}_B$ de B stable par l'involution $\star$ et un réseau U de $U_{\mathbb{Q}}$ qui est stable sous l'action de $\mathcal{O}_B$. On suppose que l'accouplement $<,>$ induit un accouplement $U \times U \to \mathbb{Z}$. Soit p un nombre premier.

Hypothèse 1.1.1. — On suppose dans la suite que p vérifie les proprietés suivantes.

i. p est non ramifié dans F_0, et dans le cas (A) chaque place de F_0 au-dessus de p se décompose dans F.

ii. $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$.

iii. $\mathcal{O}_B$ est un ordre de B maximal en p.

iv. L'accouplement $<,>: U \times U \to \mathbb{Z}$ est parfait en p.

v. p est totalement décomposé dans E.

Sous les hypothèses précédentes, le nombre premier p est non ramifié dans F. On note $\pi_1, ..., \pi_h$ les idéaux premiers de F_0 au-dessus de p, et d_i le degré résiduel de π_i. Lorsque $[F : F_0] = 2$, on note π_i^+ et π_i^- les idéaux premiers de F au-dessus de π_i. Fixons un plongement $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$. Lorsque B est de type (A), on a $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{i=1}^{h} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, où $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$

est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_{p^{d_i}}$, l'unique extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré d_i. Lorsque B est de type (C), on a

$$\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{i=1}^{h} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})\,.$$

Remarque 1.1.2. — On a choisi l'indexation des idéaux π_i et des isomorphismes entre $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ et des produits d'algèbres de matrices de telle sorte que dans le cas (A), l'idéal à gauche engendré par π_i^+ dans $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ corresponde à l'idéal à gauche engendré par le $2h$-uplet de matrices scalaires avec la matrice scalaire p en position $2i-1$ et la matrice scalaire 1 partout ailleurs. De même dans le cas (C).

Remarque 1.1.3. — Fixons un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}_p$, la complétion p-adique de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Si τ est un plongement de F_0 dans $\mathbb{R}$, il induit un plongement de F_0 dans $\mathbb{C}_p$, et il envoie un unique idéal π_i dans l'idéal maximal de $\mathbb{C}_p$. On dira que τ est un plongement au-dessus de π_i. De même, dans le cas (A), un plongement de F dans $\mathbb{C}$ induit un plongement de F dans $\mathbb{C}_p$, et envoie un unique idéal π_i^+ où π_i^- dans l'idéal maximal de $\mathbb{C}_p$. Si τ est un plongement de F_0 au-dessus de π_i, on ordonne σ et $\bar{\sigma}$ les plongements de F au-dessus de τ de manière à ce que σ soit au-dessus de π_i^+ et $\bar{\sigma}$ au-dessus de π_i^-. On dispose alors du couple (a_τ, b_τ), qui est bien défini. Le lemme qui suit montre que l'hypothèse **1.1.1** implique que ce couple ne dépend pas du plongement au-dessus de π_i. On notera donc (a_i, b_i) le couple (a_τ, b_τ), où τ est un plongement de F_0 au-dessus de π_i.

Lemme 1.1.4. — *On a $(a_\tau, b_\tau) = (a_{\tau'}, b_{\tau'})$ si τ et τ' sont au dessus d'un même idéal premier π_i de F_0.*

Démonstration. — On a fixé un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}_p$ et $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$. On a $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \prod_{i=1}^h \mathcal{O}_{F,\pi_i^+} \oplus \mathcal{O}_{F,\pi_i^-}$. Pour tout $1 \leq i \leq h$, notons Σ_i l'ensemble des plongements $\tau : F_0 \to \mathbb{C}_p$ au dessus de π_i. On a $U^{1,0} \simeq \prod_{j=1}^d (\mathbb{C}_p^n)^{a_{\tau_j}} \oplus (\mathbb{C}_p^n)^{b_{\tau_j}}$ et $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ agit sur $(\mathbb{C}_p^n)^{a_{\tau_j}} \oplus (\mathbb{C}_p^n)^{b_{\tau_j}}$ a travers $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{F,\pi_i^+} \oplus \mathcal{O}_{F,\pi_i^-})$ via les plongements σ_j et $\bar{\sigma}_j$ (avec $\tau_j \in \Sigma_i$). Le déterminant de la matrice diagonale, identique en toutes les places $\pi_k \neq \pi_i$, et qui vaut $\mathrm{diag}(x, 1, \cdots, 1) + \mathrm{Id}$ au dessus de π_i pour $x \in \mathcal{O}_{F,\pi_i^+}$ est $\prod_{\tau_j \in \Sigma_i} \sigma_j^{a_{\tau_j}}(x)$. Comme Σ_i est le groupe de Galois de $\mathcal{O}_{F,\pi_i^+}$, il est clair que $\prod_{\tau_j \in \Sigma_i} \sigma_j^{a_{\tau_j}}(x) \in \mathbb{Z}_p$ pour tout $x \in \mathcal{O}_{F,\pi_i^+}$ si et seulement si a_{τ_j} est indépendant de $\tau_j \in \Sigma_i$. On raisonne de même avec les b_{τ_j}. $\square$

Remarque 1.1.5. — Soit f un entier, et notons $E_{1,1}$ l'idempotent de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^f})$ donné par la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le premier coefficient diagonal qui vaut 1. Le foncteur qui à tout $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^f})$-module M associe le $\mathbb{Z}_{p^f}$-module $E_{1,1} \cdot M$ réalise une équivalence de catégorie de Morita. Dans le cas (A), on considère l'idempotent

$$F \;=\; (F_i^+ \oplus F_i^-)_{1 \leqslant i \leqslant h}$$

de $\prod_{i=1}^h \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, où chaque $F_i^\pm$ désigne la matrice $E_{1,1}$. Dans le cas (C), on considère l'idempotent

$$F \;=\; (F_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$$

de $\prod_{i=1}^{h} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$ où chaque F_i désigne la matrice $E_{1,1}$. Le foncteur $M \mapsto F \cdot M$ réalise une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-modules vers la catégorie des modules sur

$$\prod_{i=1}^{h} \mathbb{Z}_{p^{d_i}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{d_i}}$$

dans le cas (A) et celle des modules sur

$$\prod_{i=1}^{h} \mathbb{Z}_{p^{d_i}}$$

dans le cas (C). Nous utiliserons systématiquement ce dictionnaire lorsque nous rencontrerons des $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ modules.

1.2. Variétés de Shimura sans niveau en p. — Fixons un idéal premier π dans le corps réflexe E au dessus de p et un entier $N \geqslant 3$ non divisible par p. On note $\mathcal{O}_E$ la complétion de l'anneau d'entiers de E en l'idéal π et $K_E = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_E)$ qui est isomorphe à $\mathbb{Q}_p$. Le polynôme $\det_{U^{1,0}}$ est à coefficients dans $\mathcal{O}_E$. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant les clôtures normales des complétions de F_0 en chacune des places π_i, et $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Il existe un schéma quasi-projectif X sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ dont les S-points sont les classes d'isomorphismes de quadruplets $(A, \lambda, \iota, \eta)$ où

i. $A \to S$ est un schéma abélien.

ii. $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.

iii. $\iota : \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$ est compatible avec les involutions $\star$ et de Rosati, et les polynômes $\det_{\mathrm{Lie}(A)}$ et $\det_{U^{1,0}}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_S$ sont égaux.

iv. $\eta : A[N] \to U/NU$ est une similitude symplectique, $\mathcal{O}_B$-linéaire qui se relève localement pour la topologie étale en une similitude symplectique $\mathcal{O}_B$-linéaire

$$\mathrm{H}_1(A, \mathbb{A}_f^p) \to U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_f^p .$$

Le schéma X sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ est le modèle entier canonique d'une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) associée au groupe réductif G sur $\mathbb{Q}$. Il est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$.

Remarque 1.2.1. — Le schéma X est en réalité défini sur $\mathcal{O}_E$, mais nous aurons besoin de nous placer sur $\mathcal{O}$ pour définir les faisceaux de formes modulaires.

Remarque 1.2.2. — La condition $\det_{\mathrm{Lie}(A)} = \det_{U^{1,0}}$ se reformule simplement de la manière suivante. Notons St le $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-module

$$\bigoplus_{i=1}^{h} (\mathbb{Z}_{p^{d_i}}^n)^{a_i} \oplus (\mathbb{Z}_{p^{d_i}}^n)^{b_i}$$

lorsque l'algèbre B est de type (A) et

$$\bigoplus_{i=1}^{h} (\mathbb{Z}_{p^{d_i}}^n)^{a_i}$$

lorsque B est de type (C), avec dans les deux cas action de $\mathcal{O}_B$ facteur par facteur selon les isomorphismes de $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ avec des produits d'algèbres de matrices. Il est équivalent de demander que $\det_{\mathrm{Lie}(A)} = \det_{U^{1,0}}$ et de demander que $\mathrm{Lie}(A)$ soit localement isomorphe pour la topologie de Zariski au faisceau $\mathrm{St} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ comme $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_S$-module.

Remarque 1.2.3. — Tous les résultats de cet article se généralisent immédiatement au cas de n'importe quelle structure de niveau hors de p.

1.3. Structure de niveau iwahorique. — Soient $l \leqslant m$ et f trois entiers. On note BT^f_m le champ des groupes de Barsotti-Tate de hauteur mf avec une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. On note

$$\mathrm{BT}^{f,\mathrm{pol}}_l$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de hauteur $2lf$ avec une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ qui respecte la polarisation sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. On note

$$\hat{\mathrm{BT}}^f_{l,m}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate de dimension lf et hauteur mf avec une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ et

$$\hat{\mathrm{BT}}^{f,\mathrm{pol}}_l$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de dimension lf avec une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ qui respecte la polarisation sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$. Par restriction on obtient des immersions ouvertes et fermées

$$\hat{\mathrm{BT}}^f_{l,m} \hookrightarrow \mathrm{BT}^f_m \times \mathrm{Spf}(\mathcal{O})$$

et

$$\hat{\mathrm{BT}}^{f,\mathrm{pol}}_l \hookrightarrow \mathrm{BT}^{f,\mathrm{pol}}_l \times \mathrm{Spf}(\mathcal{O})\,.$$

Dans le cas (A), il existe un morphisme

$$\mathfrak{P} \,:\, X \longrightarrow \prod_{i=1}^h \mathrm{BT}^{d_i}_{a_i+b_i}$$

défini de la manière suivante. On a $A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^d A[(\pi_i^+)^\infty] \oplus A[(\pi_i^-)^\infty]$. Remarquons que $A[(\pi_i^+)^\infty]$ s'identifie au dual de $A[(\pi_i^-)^\infty]$. Le groupe de Barsotti-Tate $A[(\pi_i^+)^\infty]$ est naturellement un module sous $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$ et s'écrit donc

$$\mathbb{Z}^n_{p^{d_i}} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}} G_i$$

où G_i est un groupe de Barsotti-Tate de hauteur $d_i(a_i+b_i)$ muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$ et dont la fibre spéciale sur $\mathcal{O}/\pi$ est de dimension d_ia_i. Le morphisme $\mathfrak{P}$ envoie le schéma abélien A sur le groupe de Barsotti-Tate $\prod_i G_i$. Dans le cas (C), il existe de même un morphisme

$$\mathfrak{P} \,:\, X \longrightarrow \prod_{i=1}^h \mathrm{BT}^{d_i,\mathrm{pol}}_{a_i}\,.$$

En effet, on a $A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^d A[\pi_i^\infty]$, où les groupes de Barsotti-Tate $A[\pi_i^\infty]$ sont principalement polarisés et sont des modules sous

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})\,.$$

Ils sont donc égaux à

$$\mathbb{Z}^n_{p^{d_i}} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}} G_i$$

où G_i est un groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé de hauteur $2a_i$ muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$. Le morphisme $\mathfrak{P}$ envoie le schéma abélien A sur le groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé $\prod_i G_i$. Dans le cas (A) comme dans le cas (C), le théorème de déformation de Serre-Tate implique que le morphisme $\mathfrak{P}$ est formellement étale. Dans tous les cas, on note $\mathfrak{P}_i$

la i-ème coordonnée de $\mathfrak{P}$. Dans le cas non polarisé on note $\mathfrak{P}_i^D$ le composé de la dualité de Cartier avec $\mathfrak{P}_i$. Passer de $\mathfrak{P}_i$ à $\mathfrak{P}_i^D$ revient à échanger π_i^+ et π_i^-. Les foncteurs $\mathfrak{P}_i$ sont simplement les projections par l'idempotent F_i^+ défini dans la remarque **1.1.5** dans le cas (A) et par l'idempotent F_i dans le cas (C).

Par définition, une structure de niveau iwahorique sur un groupe de Barsotti-Tate G de hauteur mf et muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ est la donnée d'un drapeau complet $H_\bullet = (H_0 = 0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_m = G[p])$ de sous-groupe finis et plats de $G[p]$, où H_j est stable par $\mathbb{Z}_{p^f}$ de rang p^{fj} pour tout $j \leqslant m$. De même, une structure de niveau iwahorique sur un groupe de Barsotti-Tate G principalement polarisé de hauteur $2lf$ et muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ est la donnée d'un drapeau complet $H_\bullet = (H_0 = 0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_l \subset G[p])$ de sous-groupe finis et plats de $G[p]$, où H_j est stable par $\mathbb{Z}_{p^f}$ de rang p^{fj} pour tout $j \leqslant l$ et H_l est totalement isotrope. On note

$$\mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate de hauteur mf munis d'une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ et d'une structure de niveau iwahorique et

$$\mathrm{BT}^{f,\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de hauteur $2lf$ munis d'une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$ et d'une structure iwahorique. Le morphisme d'oubli de la structure de niveau iwahorique est représentable et propre d'après la théorie du schéma de Hilbert. Dans le cas (A), on pose

$$X_{\mathrm{Iw}} = X \times_{\prod_{i=1}^h \mathrm{BT}^{d_i}_{a_i+b_i}} \prod_{i=1}^h \mathrm{BT}^{d_i}_{a_i+b_i,\mathrm{Iw}}$$

Dans le cas (C), on pose

$$X_{\mathrm{Iw}} = X \times_{\prod_{i=1}^h \mathrm{BT}^{d_i,\mathrm{pol}}_{a_i}} \prod_{i=1}^h \mathrm{BT}^{d_i,\mathrm{pol}}_{a_i,\mathrm{Iw}}$$

Ainsi, X_{Iw} est un schéma propre sur X. Les S-points du schéma X_{Iw} correspondent à des quadruplets $(A,\iota,\lambda,\eta,H_\bullet)$ où (A,ι,λ,η) est un S-point de X et $H_\bullet$ un drapeau de sous-$\mathcal{O}_B$-modules finis et plats de $A[p]$ vérifiant des conditions additionnelles. Ainsi, dans le cas (A), on a pour tout i un drapeau $0 \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,a_i+b_i} = A[\pi_i^+]$, chaque sous-groupe $H_{i,j}$ étant stable par $\mathcal{O}_B$ et de hauteur nd_ij. Dans le cas (C), on a pour tout i un drapeau

$$0 \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,a_i}$$

de $A[\pi_i]$, chaque $H_{i,j}$ étant totalement isotrope, stable par $\mathcal{O}_B$ et de hauteur nd_ij.

1.4. Formes modulaires classiques. — Notons A le schéma abélien universel sur X. Soit $e^\star\Omega^1_{A/X}$ le faisceau conormal de A le long de la section neutre. Il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $\mathrm{St} \otimes \mathcal{O}_X$ comme $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_X$-module. Par l'équivalence de Morita (voir la remarque **1.1.5**), ce faisceau est déterminé par le sous-faisceau $F \cdot e^\star\Omega^1_{A/X}$, qui est localement isomorphe à

$$\prod_{i=1}^h (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_i}})^{a_i} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_i}})^{b_i}$$

comme $(\prod_{i=1}^h \mathbb{Z}_{p^{d_i}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \otimes \mathcal{O}_X$-module dans le cas (A) et à $\prod_{i=1}^h (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_i}})^{a_i}$ comme $(\prod_{i=1}^h \mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \otimes \mathcal{O}_X$-module dans le cas (C). Soit

$$\mathcal{T} = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_X}(\mathrm{St} \otimes \mathcal{O}_X, e^\star \Omega^1_{A/X}) .$$

Dans le cas (A), c'est un torseur sur X sous le groupe

$$\mathrm{M} = \prod_{i=1}^h \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}/\mathbb{Z}_p}(\mathrm{GL}_{a_i} \times \mathrm{GL}_{b_i}) .$$

Dans le cas (C), c'est un torseur sous le groupe

$$\mathrm{M} = \prod_{i=1}^h \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_{a_i} .$$

Ces groupes sont décomposés sur K. Notons dans les deux cas $\mathrm{T_M}$ le tore diagonal de M, notons $\mathrm{B_M}$ le sous-groupe de Borel supérieur de M, notons $\mathrm{N_M}$ son radical unipotent, $X(\mathrm{T_M})$ le groupe des caractères de $\mathrm{T_M}$ définis sur K et $X(\mathrm{T_M})^+$ le cône des poids dominants pour $\mathrm{B_M}$.

Définition 1.4.1. — Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$, le faisceau des formes modulaires de poids κ est $\omega^\kappa = \phi_\star\, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}[\kappa']$ où l'on a posé $\kappa' = -w_0\, \kappa$ avec w_0 l'élément le plus long du groupe de Weyl de M relativement au tore diagonal $\mathrm{T_M}$, on a noté $\phi : \mathcal{T} \to X$ la projection canonique et $\phi_\star\, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}[\kappa']$ désigne le sous-faisceau de $\phi_\star\, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ où $\mathrm{B_M} = \mathrm{T_M N_M}$ agit par le caractère κ' sur $\mathrm{T_M}$ et le caractère trivial sur $\mathrm{N_M}$.

Donnons une description plus concrète des formes modulaires. Dans le cas (A), on a par l'équivalence de Morita

$$\mathcal{T} = \prod_{i=1}^h \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}} \otimes \mathcal{O}_X}((\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_i}})^{a_i}, F_i^+ \cdot e^\star \Omega^1_{A/X}) \oplus \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}} \otimes \mathcal{O}_X}((\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_i}})^{b_i}, F_i^- \cdot e^\star \Omega^1_{A/X}).$$

On notera $(\omega_i^+, \omega_i^-)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ un point du torseur. Une section du faisceau ω^κ sur un ouvert V est une fonction g sur les quintuplets $\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i^+ + \omega_i^-)_{1 \leqslant i \leqslant h}\big) \in \mathcal{T}(V)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i^+ + \omega_i^-) \circ b\big)\Big) \; = \; \kappa'(b) \cdot g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i^+ + \omega_i^-)\big)\Big)$$

pour tout b dans B. Dans le cas (C), on a une interprétation similaire. On note $(\omega_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ un point de $\mathcal{T}$ qui est isomorphe à

$$\prod_{i=1}^h \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}} \otimes \mathcal{O}_X}((\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_i}})^{a_i} \;,\; F_i \cdot e^\star \Omega^1_{A/X})$$

d'après l'équivalence de Morita. Une section g du faisceau ω^κ sur un ouvert V est donc une fonction sur les quintuplets $\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}\big) \in \mathcal{T}(V)$ vérifiant pour tout $b \in B$ l'équation fonctionnelle

$$g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i) \circ b\big)\Big) \; = \; \kappa'(b) \cdot g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i)\big)\Big) .$$

On désigne encore par ω^κ l'image inverse du faisceau ω^κ sur X_{Iw} par le morphisme d'oubli du niveau iwahorique en p.

On suppose l'hypothèse suivante vérifiée.

Hypothèse 1.4.2. — La dimension complexe de l'espace symétrique de G est > 1.

Le principe de Köcher énoncé dans la proposition **5.2.1** est alors valable et nous pouvons définir les formes modulaires sans nous occuper des pointes de la variété de Shimura.

Définition 1.4.3. — Une forme modulaire de poids $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$ sur $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ est une section globale du faisceau ω^κ.

Remarque 1.4.4. — Pour définir le faisceau ω^κ, nous avons eu besoin de nous placer sur $\mathcal{O}$ (et pas simplement sur $\mathcal{O}_E$).

1.5. Fonction degré et formes surconvergentes. — Soit $\ell \leq m$ et f des entiers. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $v : \bar{K}^\star \to \mathbb{R}$ sa valuation normalisée par $v(p) = 1$. Rappelons que Fargues a défini dans [**Fa**] le degré $\deg(G)$ d'un groupe fini et plat G sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On définit une fonction

$$\begin{array}{rcl} \delta \ : \ \mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})) & \longrightarrow & [0, fl] \\ (G, H_\bullet) & \longmapsto & \deg(H_l) \end{array}$$

On définit de même une fonction

$$\begin{array}{rcl} \delta \ : \ \mathrm{BT}^{f,\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})) & \longrightarrow & [0, fl] \\ (G, H_\bullet) & \longmapsto & \deg(H_l) \end{array}$$

Dans les deux cas, la fonction δ se factorise par l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Barsotti-Tate munis de structures de niveau iwahoriques. Supposons $m = 2l$ dans le cas polarisé. Supposons que le groupe de Barsotti-Tate G provienne d'un élément de $\hat{\mathrm{BT}}^f_{l,m}(\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$ dans le cas (A), et de $\hat{\mathrm{BT}}^{f,\mathrm{pol}}_l(\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$ dans le cas (C). On dit que $(G, H_\bullet)$ est ordinaire-multiplicatif si $\delta(G, H_\bullet) = fl$. Dans ce cas, G est un groupe de Barsotti-Tate extension d'un Barsotti-Tate étale de hauteur $f(m-l)$ par un Barsotti-Tate multiplicatif de hauteur fl et le sous-groupe H_l est de type multiplicatif.

On note X^{rig}_{Iw} l'espace rigide obtenu comme fibre générique au sens de Raynaud de la complétion formelle de X_{Iw} le long de sa fibre spéciale. En composant le morphisme $\mathfrak{P}$ avec les fonctions δ qui viennent d'être définies, on obtient une application encore notée δ

$$\delta \ : \ X^{rig}_{\mathrm{Iw}} \ \longrightarrow \ \prod_{i=1}^h [0, d_i a_i] \, .$$

On note δ_i la i-ème coordonnée de l'application δ. Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant h} \in \mathbb{R}^h$, on définit l'ouvert rigide

$$X_{\mathrm{Iw}}(\varepsilon) \ = \ \{x \in X^{rig}_{\mathrm{Iw}} \ \text{tq} \ \delta_i(x) \geqslant d_i a_i - \varepsilon_i \ \text{pour} \ 1 \leqslant i \leqslant h\} \, .$$

Le lieu ordinaire-multiplicatif est $X_{\mathrm{Iw}}(0)$. C'est le tube d'un ouvert de la fibre spéciale $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Il est non vide d'après [**We**, 1.6.3] car on a supposé que p est totalement décomposé dans le corps réflexe E.

Remarque 1.5.1. — Le théorème de Wedhorn montre en fait que p est totalement décomposé dans E si et seulement si le lieu ordinaire est dense dans $X \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Dans ce cas, le lieu ordinaire est non vide dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ et il en est de même du lieu ordinaire-multiplicatif. On peut montrer que le lieu ordinaire est dense dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ si p est totalement décomposé dans F, donc si le groupe G est déployé sur $\mathbb{Q}_p$. L'énoncé réciproque est également vrai sous l'hypothèse que p est non ramifié dans F. Ainsi, si p est totalement décomposé dans E mais pas dans F, le lieu ordinaire n'est pas dense dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$.

Cela résulte simplement d'une énumération des strates de Kottwitz–Rapoport de codimension zéro de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$.

Définition 1.5.2. — Soit $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$ un poids dominant. Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des formes modulaires surconvergentes de poids κ est

$$\mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\, \kappa)^\dagger \;=\; \mathrm{colim}_{\varepsilon>0}\; \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(\varepsilon),\, \omega^\kappa)\,.$$

2. Action de l'algèbre de Hecke

2.1. Action géométrique sur les champs de BT. — Soient $l \leqslant m$ et f trois entiers positifs. Nous allons construire des correspondances géométriques, c'est à dire des morphismes représentables, finis et étales

$$\begin{array}{lcccll} p_1^{\mathrm{BT}},\, p_2^{\mathrm{BT}} & : & C^{\mathrm{BT}} & \longrightarrow & \mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K) & \text{dans le cas non polarisé} \\ p_1^{\mathrm{BT}},\, p_2^{\mathrm{BT}} & : & C^{\mathrm{BT}} & \longrightarrow & \mathrm{BT}^{f,\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K) & \text{dans le cas polarisé.} \end{array}$$

Dans le cas non polarisé, C^{BT} est par définition le champ sur $\mathrm{Spec}(K)$ qui paramètre les triplets

$$(G, H_\bullet, L)$$

où G est un groupe de Barsotti-Tate de hauteur mf avec une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$, où $H_\bullet$ est une structure de niveau iwahorique sur G et où L est un sous-groupe de $G[p]$ stable par $\mathbb{Z}_{p^f}$ vérifiant

$$L \oplus H_l = G[p].$$

La projection p_1^{BT} est l'oubli du sous-groupe L. La projection p_2^{BT} envoie le triplet $(G, H_\bullet, L)$ sur le couple $(G', H'_\bullet)$ vérifiant que $G' = G/L$ et que H'_k est l'image de H_k dans G' pour tout $1 \leqslant k \leqslant l$ et l'image de $p^{-1}(H_k \cap L)$ dans G' pour tout $l+1 \leq k \leq m$. Dans le cas polarisé, C^{BT} est le champ sur $\mathrm{Spec}(K)$ qui paramètre les triplets

$$(G, H_\bullet, L)$$

où G est un groupe Barsotti-Tate principalement polarisé de hauteur $2lf$ avec une action de $\mathbb{Z}_{p^f}$, où $H_\bullet$ est une structure de niveau iwahorique sur G et où L est un sous-groupe lagrangien stable par $\mathbb{Z}_{p^f}$ de $G[p]$ vérifiant

$$L \oplus H_l = G[p].$$

La projection p_1^{BT} est l'oubli du groupe L. La projection p_2^{BT} envoie le triplet $(G, H_\bullet, L)$ sur le couple $(G', H'_\bullet)$ vérifiant que $G' = G/L$ et que H'_k est l'image de H_k dans G' pour tout $1 \leqslant k \leqslant l$.

Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des parties de l'ensemble des classes d'isomorphismes d'un groupoïde $\mathcal{X}$. On obtient, dans le cas non-polarisé, une application $p_2^{\mathrm{BT}} \circ (p_1^{\mathrm{BT}})^{-1}$:

$$U \;:\; \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar K})\right) \;\longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar K})\right)$$

et de même, dans le cas polarisé, une application :

$$U \;:\; \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^{f,pol}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar K})\right) \;\longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^{f,pol}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar K})\right)$$

L'application U respecte les ensembles finis.

2.2. Action géométrique sur les variétés de Shimura. — Nous allons associer à tout entier $1 \leqslant i \leqslant h$ des correspondances géométriques

$$\begin{array}{ccccc} p_1\,,\, p_2 & : & C_i & \longrightarrow & X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K) \\ p_1^{rig},\, p_2^{rig} & : & C_i^{rig} & \longrightarrow & X_{\mathrm{Iw}}^{rig}. \end{array}$$

Pour définir C_i dans le cas non polarisé il suffit de réaliser le produit fibré

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathrm{BT}} \arrow[d, "p_1^{\mathrm{BT}}"] \\ X_{\mathrm{Iw}|K} \arrow[r] & \mathrm{BT}^{d_i}_{a_i+b_i,\mathrm{Iw}|K} \end{tikzcd}$$

Cette définition fournit la projection $p_1 : C_i \to X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$. On vérifie grâce à la remarque **2.2.1** que C_i est isomorphe au produit fibré

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathrm{BT}} \arrow[d, "p_2^{\mathrm{BT}}"] \\ X_{\mathrm{Iw}|K} \arrow[r] & \mathrm{BT}^{d_i}_{a_i+b_i,\mathrm{Iw}|K} \end{tikzcd}$$

Cela fournit la seconde projection p_2. Les projections p_1 et p_2 sont finies étales. On a une construction analogue dans le cas polarisé.

Remarque 2.2.1. — Le schéma C_i sur $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ paramètre des sous-groupes d'un type particulier du schéma abélien universel. Dans le cas (A), il paramètre les sextuplets $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, L)$ où $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$ est un point de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ et L est un sous-groupe de $A[p]$ stable par $\mathcal{O}_B$ vérifiant

$$L[\pi_i^+] \;=\; L[\pi_i^-]^\perp$$

tels que $F_i^+ \cdot (A, H_\bullet, L)$ détermine un point du champ C^{BT}. On a une interprétation similaire dans le cas (C). On dira dans les deux cas que L est un groupe de type U_i et que l'isogénie $A \to A/L$ est de type U_i.
Il y a tout de même une ambiguïté dans l'isomorphisme entre C_i et l'espace obtenu grâce au produit fibré par la projection p_2^{BT}. En effet, si $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, L)$ est un sextuplet comme précédemment, la projection p_2 correspond au schéma abélien A/L avec des structures additionnelles. Ces structures sont définies canoniquement, sauf la polarisation. S'il n'y a qu'une seule place au-dessus de p dans F_0, alors on définit l'opérateur U_p qui est canonique. Dans ce cas, L est un sous-groupe totalement isotrope de $A[p]$, et on prend comme polarisation pour A/L la polarisation descendue $p \cdot \lambda$. Dans le cas général, L est un sous-groupe totalement isotrope de $A[\pi_i]$. Fixons un élément totalement positif x_i de O_{F_0} tel que la valuation π_j-adique de x_i soit 0 si $j \neq i$, et 1 si $j = i$. On définit la polarisation sur A/L comme la polarisation descendue $x_i \cdot \lambda$. C'est bien une polarisation de degré premier à p. Néanmoins, le choix de l'élément x_i fait que la définition de la projection p_2 (donc de l'opérateur de Hecke géométrique) n'est pas canonique. Cela ne sera pas important dans la suite.

On définit C_i^{rig} comme le produit fibré

$$\begin{tikzcd} C_i^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d] & C_i^{\mathrm{an}} \arrow[d, "p_1"] \\ X_{\mathrm{Iw}}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & X_{\mathrm{Iw}}^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

où on aurait pu remplacer p_1 par p_2 et « an » désigne l'analytifié d'un schéma de type fini sur $\mathrm{Spec}(K)$. Dans toute la suite, si le contexte est clair, on supprime des notations les exposants « rig » et « BT ». Notons $\mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig})$ la catégorie des ouverts admissibles de X_{Iw}^{rig}. Les correspondances C_i^{rig} définissent des foncteurs

$$\begin{array}{rcl} U_i \ : \ \mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}) & \to & \mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}) \\ V & \mapsto & p_2\big(p_1^{-1}(V)\big) \end{array}$$

2.3. Action sur les formes modulaires. — Notons $\pi_i : A' \to A''$ l'isogénie universelle au dessus de C_i où A' et A'' désignent l'image inverse par p_1 et p_2 du schéma abélien universel A. Elle induit une application $\mathcal{O}_B$-linéaire

$$\pi_i^\star \ : \ e^\star\,\Omega^1_{A''/X} \longrightarrow e^\star\,\Omega^1_{A'/X}$$

et donc aussi une application

$$\pi_i^\star \ : \ F\cdot e^\star\,\Omega^1_{A''/X} \longrightarrow F\cdot e^\star\,\Omega^1_{A'/X}$$

Au dessus de $X_{\mathrm{Iw}}\times\mathrm{Spec}(K)$ le nombre premier p est inversible et les applications $\pi_i^\star$ sont des isomorphismes. Il en résulte qu'on dispose d'un isomorphisme inverse

$$(\pi_i^\star)^{-1} \ : \ p_1^\star\,\mathcal{T} \longrightarrow p_2^\star\,\mathcal{T}$$

et donc d'applications $(\pi_i^\star)^{-1} : p_2^\star\,\omega^\kappa \to p_1^\star\,\omega^\kappa$ pour tout $\kappa\in X(\mathrm{T_M})^+$. Soit V un ouvert de X_{Iw}^{rig}. Posons $V' = U_i(V)$. On note $\tilde{U}_i$ l'application composée

$$\mathrm{H}^0(V',\,\omega^\kappa) \longrightarrow \mathrm{H}^0(p_1^{-1}(V),\,p_2^\star\,\omega^\kappa) \overset{(\pi_i^\star)^{-1}}{\longrightarrow} \mathrm{H}^0(p_1^{-1}(V),\,p_1^\star\,\omega^\kappa) \overset{\mathrm{Tr}_{p_1}}{\longrightarrow} \mathrm{H}^0(V,\,\omega^\kappa)\,.$$

On a une définition analogue en prenant pour source et but $X_{\mathrm{Iw}}\times\mathrm{Spec}(K)$. Soit n_i l'entier égal à $d_i\cdot a_i\cdot b_i$ dans le cas (A) et à $d_i\cdot a_i(a_i+1)/2$ dans le cas (C). On note

$$U_i \ = \ \frac{\tilde{U}_i}{p^{n_i}}$$

qui est un opérateur de Hecke agissant sur l'espace des formes classiques $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}\times\mathrm{Spec}(K),\omega^\kappa)$ ainsi que sur l'espace des formes surconvergentes $\mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\kappa)^\dagger$. La normalisation par le facteur p^{-n_i} vise à optimiser l'intégralité du morphisme Tr_{p_1} au dessus du tube ordinaire-multiplicatif $X_{\mathrm{Iw}}(0)$.

Remarque 2.3.1. — Explicitons l'opérateur U_i dans le cas (A). Soit f une section du faisceau ω^κ vue comme fonction sur les sextuplets $\big(A,\lambda,\iota,\eta,H_\bullet,(\omega_k^+\oplus\omega_k^-)_{1\leqslant k\leqslant h}\big)$. Localement pour la topologie étale, la trace du morphisme p_1 est une somme et on a

$$U_i(f)\Big(\big(A,\lambda,\iota,\eta,H_\bullet,(\omega_k^+\oplus\,\omega_k^-)\big)\Big) = \frac{1}{p^{n_i}}\sum_{L\subset A[p]\ \text{de type}\ U_i} f\Big(\big(A/L,\lambda',\iota',\eta',H'_\bullet,(\omega_k'^+\oplus\,\omega_k'^-)\big)\Big)$$

où $(\omega_k^{'+} \oplus \omega_k^{'-})$ est donné par la règle $\pi^\star \omega_k^{'} = \omega_k$ pour $\pi : A \to A/L$ la projection et où λ', ι' et $H'_\bullet$ désigne les structures induites par λ, ι et $H_\bullet$ sur A/L.

Remarque 2.3.2. — Comme détaillé dans la remarque **2.2.1**, l'opérateur de Hecke U_i n'est a priori pas défini canoniquement. Il est cependant canonique si on se restreint aux formes invariantes par l'action d'un certain groupe (voir [**PS**] dans le cas Hilbert par exemple). Remarquons enfin que, même avec cette définition non canonique, les opérateurs de Hecke (U_i) commutent entre eux. En effet, on a la formule

$$(U_iU_j)(f)\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, (\omega_k^{+} \oplus \omega_k^{-})\big)\Big) =$$

$$\frac{1}{p^{n_i+n_j}} \cdot \sum_{\substack{L_1 \subset A[p] \text{ de type } U_i \\ L_2 \subset A[p] \text{ de type } U_j}} f\Big(\big(A/(L_1+L_2), \lambda', \iota', \eta', H'_\bullet, (\omega_k^{'+} \oplus \omega_k^{'-})\big)\Big)$$

où la polarisation λ' est la polarisation descendue $(x_ix_j) \cdot \lambda$.

3. Dynamique d'un opérateur de Hecke

Nous montrons que les itérations successives d'un opérateur de Hecke tendent à accumuler les points de X_{Iw}^{rig} sur $X_{\mathrm{Iw}}(0)$. Pour simplifier les notations, on préfère décrire d'abord la dynamique au niveau des champs de groupes de Barsotti-Tate.

3.1. Sur les champs de BT. — Commençons par traiter le cas non polarisé. Soient $l \leqslant m$ et f trois entiers positifs. Rappelons qu'on dispose pour toute extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$ de l'opérateur de Hecke U qui agit sur $\mathcal{P}(\mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$ et d'une application degré

$$\delta \ : \ \mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \ \longrightarrow \ [0, fl]$$

qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme d'un objet de $\mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Il est clair que l'opérateur U stabilise le sous-ensemble

$$\mathcal{P}(\hat{\mathrm{BT}}^f_{l,m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})) \ \subset \ \mathcal{P}(\mathrm{BT}^f_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}))\,.$$

Les résultats qui suivent sont directement inspirés de [**Pi**].

Proposition 3.1.1. — *Soit x un point de $\hat{\mathrm{BT}}^f_{l,m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et $y \in U(\{x\})$. On a $\delta(y) \geqslant \delta(x)$.*

Démonstration. — Soient $H_{l,x}$ et $H_{l,y}$ les deux sous-groupes finis et plats de rang p^{fl} sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ correspondants à x et y. L'isogénie canonique entre G_x et G_y induit un morphisme de $H_{l,x}$ vers $H_{l,y}$ qui est un isomorphisme en fibre générique. D'après [**Fa**, coro. 3], on a $\deg(H_{l,y}) \geqslant \deg(H_{l,x})$. $\square$

Proposition 3.1.2. — *Soit $x \in \hat{\mathrm{BT}}^f_{l,m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ qui correspond à $(G, H_\bullet)$. Supposons qu'il existe un point $y \in U(x)$ tel que $\delta(x) = \delta(y)$. Alors H_l est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un et $G[p]$ est somme directe de H_l et d'un autre groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un stable par $\mathbb{Z}_{p^f}$. En particulier, $\delta(x)$ est entier.*

Démonstration. — Par définition de l'opérateur U, il existe un sous-groupe $L \subset G[p]$ fini et plat de rang $p^{f(m-l)}$ stable par $\mathbb{Z}_{p^f}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$ tel que $G_{K'}[p] = H_{l,K'} \oplus L_{K'}$ et que y corresponde au couple $(G/L, \pi(H_\bullet))$ où π désigne la projection canonique de G sur G/L et l'image est prise au sens schématique. Comme $\delta(x) = \delta(y)$, le morphisme $H_l \to \pi(H_l)$ qui est un isomorphisme générique est un isomorphisme sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ [**Fa**, coro. 3]. Le morphisme $H_l \times L \to G[p]$ qui est un isomorphisme en fibre générique induit une égalité générique entre les sous-groupes $\pi(H_l)$ et $G[p]/L$ de G/L. Par adhérence schématique dans G/L, on en déduit l'égalité de $\pi(H_l)$ et $G[p]/L$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On obtient donc $\deg(H_l) = fl - \deg(L)$. Cette égalité de degrés implique que $H_l \times L \to G[p]$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. En particulier, H_l et L sont des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon un. Le degré de H_l est entier d'après [**Pi**, lem. 2.1]. □

Le cas polarisé se traite exactement de la même manière ; les détails sont d'ailleurs expliqués dans [**Pi**, th. 3.1]. Contentons-nous d'exposer les résultats. Soient l et f deux entiers et

$$x \in \hat{\mathrm{BT}}^{f,\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

correspondant à $(G, H_\bullet)$.

Proposition 3.1.3. — *Pour tout $y \in U(\{x\})$ on a $\delta(y) \geqslant \delta(x)$. En cas d'égalité, H_l est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un et $G[p]$ est somme directe de H_l et d'un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un ; les deux facteurs de cette somme directe sont totalement isotropes et stables par $\mathbb{Z}_{p^f}$, et $\delta(x)$ est entier.*

3.2. Sur les variétés de Shimura. — On traite indifféremment le type (A) ou (C). On dispose pour $1 \leqslant i \leqslant h$ de l'opérateur de Hecke U_i qui agit sur les ouverts rigides de

$$X^{rig}_{\mathrm{Iw}}$$

en stabilisant le tube ordinaire-multiplicatif $X_{\mathrm{Iw}}(0)$. Nous avons défini l'application degré

$$\delta \,:\, X^{rig}_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{h} [0, d_i a_i]$$

et noté $\delta_i : X^{rig}_{\mathrm{Iw}} \to [0, d_i a_i]$ sa i-ème composante. La proposition suivante généralise [**Pi**, prop. 2.5].

Proposition 3.2.1. — *Soient $1 \leqslant i \leqslant h$ et $0 \leqslant n_i \leqslant d_i a_i - 1$ des entiers et $0 < \eta_i \leqslant \nu_i < 1$ des réels. Il existe un entier N tel que l'itéré U_i^N de U_i vérifie*

$$U_i^N \left(\delta_i^{-1}\left([d_i a_i - n_i - \nu_i, d_i a_i]\right)\right) \subset \delta_i^{-1}\left([d_i a_i - n_i - \eta_i, d_i a_i]\right) .$$

Démonstration. — On peut toujours supposer η_i et ν_i dans $\mathbb{Q}$. L'ouvert

$$V = \delta_i^{-1}\left([d_i a_i - n_i - \nu_i, d_i a_i - n_i - \eta_i]\right)$$

de X^{rig}_{Iw} est quasi-compact donc $p_1^{-1}(V) \subset C^{\mathrm{rig}}_{i,a_i}$ aussi. La fonction sur $p_1^{-1}(V)$ qui a un point u associe $\delta_i(p_2(u)) - \delta_i(p_1(u))$ est la valuation d'une fonction analytique donc atteint son minimum ε d'après le principe du maximum. Les propositions **3.1.2** et **3.1.3** impliquent $\varepsilon > 0$. Ainsi, pour tout $x \in V$ et $y \in U_i(\{x\})$ on a $\delta_i(y) \geqslant \delta_i(x) + \varepsilon$. On en déduit aisément le résultat. □

Rappelons que les différents opérateurs U_i avec i variable commutent deux à deux et que U_i préserve la fonction δ_j si $i \neq j$.

Corollaire 3.2.2. — *Pour tout i, soit $n_i \in [0, d_i a_i]$ un entier et $0 < \eta_i \leqslant \nu_i < 1$ des réels. Notons $n = (n_i)_i$, $\eta = (\eta_i)_i$ et $\nu = (\nu_i)_i$. Il existe un entier N tel que*

$$\left(\prod_{i=1}^{h} U_i\right)^N (X_{\mathrm{Iw}}(n+\nu))) \subset X_{\mathrm{Iw}}(n+\eta)\,.$$

4. Prolongement analytique

Dans toute cette partie, $f \in \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\ \kappa)^{\dagger}$ désigne une forme modulaire surconvergente de poids fixé $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$. Rappelons que dans le cas (A),

$$\kappa \;=\; \prod_{i=1}^{h}\prod_{j=1}^{d_i} (k_{i,j,1} \geqslant \cdots \geqslant k_{i,j,a_i}\ ,\ l_{i,j,1} \geqslant \cdots \geqslant l_{i,j,b_i})$$

est un poids dominant défini sur K du tore maximal $\mathrm{T_M}$ de $\mathrm{M} = \prod_{i=1}^{h} Res_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}/\mathbb{Z}_p}(\mathrm{GL}_{a_i} \times \mathrm{GL}_{b_i})$. Dans le cas (C),

$$\kappa \;=\; \prod_{i=1}^{h}\prod_{j=1}^{d_i} (k_{i,j,1} \geqslant \cdots \geqslant k_{i,j,a_i})$$

est un poids dominant défini sur K du tore maximal $\mathrm{T_M}$ de

$$\mathrm{M} = \prod_{i=1}^{h} Res_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_{a_i}\,.$$

On suppose f propre et de pente finie pour U_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Cela signifie que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ il existe $\alpha_i \in \bar{K}^{\times}$ tel que $U_i{\cdot}f = \alpha_i{\cdot}f$. D'après la normalisation des opérateurs de Hecke, on a $v(\alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i où l'on rappelle que v désigne la valuation de $\bar{K}^{\times}$ normalisée par $v(p) = 1$. Posons dans la suite $\alpha = \prod_i \alpha_i$ et $U = \prod_i U_i$ où le produit désigne la composition. Nous allons montrer que si κ est suffisamment grand devant les valuations p-adiques des α_i en un sens que nous préciserons en **4.5.1**, la forme f s'étend en une section du faisceau ω^{κ} sur toute la variété rigide X_{Iw}^{rig}. Remarquons qu'un tel prolongement est nécessairement unique en vertu du principe de prolongement analytique [**Be**, prop. 0.1.13].

4.1. Préliminaires de géométrie rigide. — Regroupons dans ce paragraphe les résultats généraux de géométrie rigide et formelle utilisés dans la suite de l'article.

4.1.1. Normes et recollement. — Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel admissible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ de fibre générique rigide Z^{rig} réduite. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{Z^{rig}}$ est muni d'une norme canonique. Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau localement libre de type fini sur $\mathfrak{Z}$. Notons $\mathcal{F}^{rig}$ le faisceau induit par $\mathfrak{F}$ sur Z^{rig}. D'après [**Ka**, par. 2], $\mathcal{F}^{rig}$ est canoniquement muni d'une norme $|\cdot|$ en faisant un $\mathcal{O}_{Z^{rig}}$-module de Banach. Soit T une correspondance finie étale sur Z^{rig} qui induit une application $T : \mathcal{P}(Z^{rig}) \to \mathcal{P}(Z^{rig})$. Supposons que T induise une correspondance cohomologique $T : \mathrm{H}^0(T(V), \mathcal{F}^{rig}) \to \mathrm{H}^0(V, \mathcal{F}^{rig})$ pour V un ouvert de Z^{rig}. On pose alors

$$|T|_V \;=\; \inf\{\, c \in \mathbb{R}^+ \ \text{tq}\ \ |T(f)|_V \leqslant c|f|_V \ \ \forall f \in \mathrm{H}^0(T(V), \mathcal{F}^{rig})\,\}\,.$$

Notons $\tilde{\mathcal{F}}^{rig}$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}^{rig}$ des sections de norme $\leqslant 1$. La proposition suivante est prouvée dans [**Ka**, lem. 2.3] et résulte d'un théorème de Bartenwerfer. Voir aussi [**Pi**, cor.5.1].

Proposition 4.1.2. — *Supposons Z^{rig} lisse. Pour tout ouvert quasi-compact $\mathcal{V}$ de Z^{rig}, on a*

$$\mathrm{H}^0\left(\mathcal{V},\, \mathcal{F}^{rig}\right) \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\mathcal{O}} \varprojlim_{n\geqslant 0} \mathrm{H}^0\left(\mathcal{V},\, \tilde{\mathcal{F}}^{rig}/p^n\right).$$

4.1.3. Morphismes finis étales. — Nous rappelons ici quelques propriétés des morphismes finis étales d'espaces analytiques rigides. Pour les définitions, on pourra se reporter par exemple à [**Be**]. Tous les espaces rigides considérés ici seront supposés quasi-séparés. Nous abrègerons l'expression « ouvert admissible » en « ouvert ».

Proposition 4.1.4. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini étale d'espaces analytiques rigides. Alors l'image d'un ouvert par f est un ouvert, et l'image d'un ouvert quasi-compact est un ouvert quasi-compact.*

Démonstration. — D'après [**Bo**], un morphisme plat quasi-compact d'espace analytiques rigides est ouvert. Le morphisme f étant fini étale, donc plat quasi-compact, il envoie un ouvert sur un ouvert.

Supposons que $\mathcal{U}$ est un ouvert quasi-compact de X et soit $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$ un recouvrement admissible par des affinoïdes de $f(\mathcal{U})$. Alors $(f^{-1}(\mathcal{V}_i)\cap\mathcal{U})_{i\in I}$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{U}$ et on peut donc en extraire un sous-recouvrement admissible fini. Il existe donc un ensemble fini I_0 tel que $(\mathcal{V}_i)_{i\in I_0}$ recouvre $f(\mathcal{U})$. Comme cet espace est quasi-séparé, ce recouvrement est admissible, et cela prouve que l'image de $\mathcal{U}$ par f est quasi-compacte. $\square$

Rappelons maintenant la notion usuelle de voisinage strict.

Définition 4.1.5. — Soit X un espace rigide quasi-compact sur K et $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact. Un voisinage strict de $\mathcal{U}$ est un ouvert quasi-compact $\mathcal{V}$ contenant $\mathcal{U}$ tel que le recouvrement $(\mathcal{V}, X\backslash\mathcal{U})$ de X soit admissible.

Proposition 4.1.6. — *Soit X un espace rigide sur K, $\mathcal{U}_1$,$\mathcal{U}_2$ des ouverts quasi-compacts de X et soit $\mathcal{V}_i$ un voisinage strict de $\mathcal{U}_i$ pour $i = 1, 2$. Alors $\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$, et $\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2$ un voisinage strict de $\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2$.*

Démonstration. — Traitons par exemple le cas de l'union. Nous devons montrer que le recouvrement $B = (\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2, X\backslash(\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2))$ de X est admissible. Puisque le recouvrement $(\mathcal{V}_1, X\backslash\mathcal{U}_1)$ de X est admissible, il suffit de vérifier que l'intersection du recouvrement B avec $\mathcal{V}_1$ et $X\backslash\mathcal{U}_1$ est admissible. L'intersection de B avec $\mathcal{V}_1$ donne le recouvrement $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1\backslash(\mathcal{V}_1\cap(\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2)))$ de $\mathcal{V}_1$, qui est admissible. L'intersection avec $X\backslash\mathcal{U}_1$ donne le recouvrement $B' = ((\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)\backslash\mathcal{U}_1, X\backslash(\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2)$ de $X\backslash\mathcal{U}_1$. Or le recouvrement $B'' = (\mathcal{V}_2\backslash(\mathcal{V}_2\cap\mathcal{U}_1), (X\backslash\mathcal{U}_1)\cap(X\backslash\mathcal{U}_2))$ est un recouvrement admissible de $X\backslash\mathcal{U}_1$ car $\mathcal{V}_2$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_2$. Comme B'' est un recouvrement plus fin que B', on en déduit que B' est un recouvrement admissible de $X\backslash\mathcal{U}_1$. $\square$

Les voisinages stricts sont également préservés par les morphismes finis étales.

Proposition 4.1.7. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini étale d'espaces analytiques rigides quasi-compacts sur K. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de X et $\mathcal{V}$ un voisinage strict de $\mathcal{U}$ dans X. Alors $f(\mathcal{V})$ est un voisinage strict de $f(\mathcal{U})$ dans Y.*

Démonstration. — La propriété à démontrer étant locale, on peut supposer Y affinoïde. Le fait que le recouvrement $(\mathcal{V}, X\backslash\mathcal{U})$ soit admissible implique qu'il existe un ouvert quasi-compact $\mathcal{U}'$ inclus dans le complémentaire de $\mathcal{U}$ tel que $(\mathcal{V},\mathcal{U}')$ est un recouvrement admissible de X. Choisissons des modèles formels $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de X, Y et f respectivement. D'après [**BL**] lemme 5.7, quitte à effectuer un éclatement admissible de $\mathfrak{X}$, on peut supposer que $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}'$ sont les tubes de sous-schémas ouverts $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{X}$. D'après [**BL**] théorème 5.2, quitte à effectuer un éclatement admissible de $\mathfrak{Y}$ et remplacer $\mathfrak{X}$ par son transformé strict relativement à l'éclatement de $\mathfrak{Y}$, on peut supposer que le morphisme $\mathfrak{f}$ est plat. D'après [**BL**] corollaire 5.3, quitte à effectuer un autre éclatement admissible de $\mathfrak{Y}$ et prendre pour $\mathfrak{X}$ le transformé strict, on peut supposer que $\mathfrak{f}$ est quasi-fini. Le fait d'être plat étant stable par changement de base, on s'est donc ramené au cas où le morphisme $\mathfrak{f}$ est quasi-fini et plat. En raisonnant comme dans [**AM**] lemme A.1.1., on en déduit que $\mathfrak{f}$ est fini et plat. Soit X_0 la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$, et de même pour Y_0, $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{U}'_0$. Alors $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}'$ sont égaux à l'image inverse de leur fibre spéciale par le morphisme de spécialisation. De plus, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{U}'_0$ sont deux ouverts recouvrant X_0, et on a

$$\mathcal{U}_0 \subset X_0\backslash\mathcal{U}'_0 \subset \mathcal{V}_0$$

Le morphisme f induit sur les fibres spéciales étant fini et plat, les images de $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{V}_0$ par f sont des ouverts de Y_0, et l'image de $X_0\backslash\mathcal{U}'_0$ est un fermé $\mathcal{W}_0$ de Y_0 (le morphisme f est propre, donc fermé). On a alors

$$f(\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{W}_0 \subset f(\mathcal{V}_0)$$

Les ouverts $f(\mathcal{U})$ et $f(\mathcal{V})$ sont égaux aux images inverses de $f(\mathcal{U}_0)$ et $f(\mathcal{V}_0)$ par le morphisme de spécialisation. Or si $\mathcal{W}'_0$ désigne le complémentaire de $\mathcal{W}_0$, et $\mathcal{W}'$ l'image inverse de $\mathcal{W}'_0$ par le morphisme de spécialisation, alors $\mathcal{W}'$ est un ouvert quasi-compact contenant le complémentaire de $f(\mathcal{V})$ et contenu dans le complémentaire de $f(\mathcal{U})$. Cela implique que les recouvrements $(f(\mathcal{V}), \mathcal{W}')$ et $(f(\mathcal{V}), Y\backslash f(\mathcal{U}))$ sont admissibles, donc que $f(\mathcal{V})$ est un voisinage strict de $f(\mathcal{U})$. □

Énonçons maintenant un critère de finitude, qui sera très important pour décomposer les opérateurs de Hecke.

Proposition 4.1.8. — *Soient X, Y deux espaces rigides séparés, et $f : X \to Y$ un morphisme fini étale. Soit également $\mathcal{U}$ un ouvert de X telle que l'immersion ouverte $\mathcal{U} \to X$ soit quasi-compacte. Supposons que le cardinal des fibres géométriques de $f_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to Y$ soit constant. Alors les morphismes $f_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to Y$ et $f_{|X\backslash\mathcal{U}} : X\backslash\mathcal{U} \to Y$ sont finis et étales.*

Démonstration. — La propriété étant locale sur Y, on peut supposer Y affinoïde. Alors $X = f^{-1}(Y)$ est également affinoïde, $\mathcal{U}$ est quasi-compact. D'après le lemme A.1.1. de [**AM**], le morphisme $\mathcal{U} \to Y$ est fini étale. Par [**SGA1**], V, coro. 3.5, le morphisme $\mathcal{U} \to Y$ est ouvert et fermé. Il en résulte que $X \setminus \mathcal{U} \to Y$ est aussi fini étale. □

4.2. Prolongement en grand degré. — Conformément aux notations de la partie **1.5**, posons

$$X_{\mathrm{Iw}}(1^-) \;=\; \{x \in X_{\mathrm{Iw}}^{rig} \text{ tq } \delta_i(x) > d_i a_i - 1 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant h\}\,.$$

Proposition 4.2.1. — *La forme modulaire surconvergente f s'étend canoniquement en une section de ω^κ sur $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$.*

Démonstration. — On utilise l'équation fonctionnelle $f = \alpha^{-N} \cdot U^N(f)$ valable pour n'importe quel entier $N \geqslant 0$ et on conclut en appliquant le corollaire **3.2.2**. □

Remarque 4.2.2. — Nous avons uniquement utilisé l'hypothèse de pente finie. La proposition **4.2.1** est valable pour tout poids $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$.

4.3. Décomposition des opérateurs de Hecke. — Nous avons vu que l'opérateur de Hecke U_i augmente la fonction δ_i et laisse les fonctions δ_j inchangées pour $j \neq i$. De plus, il augmente strictement la fonction δ_i sur le lieu où celle-ci n'est pas à valeurs entières. Soit r un entier ; si x est un point de X_{Iw}^{rig} avec $\delta_i(x) = r$, il peut exister des points dans $U_i(x)$ de même degré que x. Nous dirons que ces points sont « mauvais » parce qu'ils ne se rapprochent pas strictement du lieu multiplicatif.

Notation 4.3.1. — Fixons un rationnel $\varepsilon > 0$. Fixons également un indice i entre 1 et h, et un intervalle I_j de $[0, d_j a_j]$ pour $j \neq i$. Pour tout $\gamma < \varepsilon$, nous allons effectuer un recouvrement de l'ouvert $\mathcal{U}_\gamma = \delta^{-1}(I_1 \times \cdots \times I_{i-1} \times [0, d_i a_i - 1 + \gamma] \times I_{i+1} \times \cdots \times I_h)$ qui permettra de décomposer l'opérateur de Hecke. Pour simplifier les notations, on note simplement $\mathcal{U}$ pour l'ouvert $\mathcal{U}_\gamma$.

Définition 4.3.2. — Soit $\mathcal{V}$ un ouvert quasi-compact de X_{Iw}^{rig}. Une *bonne suite d'ouverts* de $\mathcal{V}$ est une suite décroissante $(\mathcal{V}_k)_{k \geq 0}$ d'ouverts quasi-compacts, avec $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_k = \emptyset$ si k est suffisamment grand. La *longueur* de la suite est le plus petit entier R tel que $\mathcal{V}_R = \emptyset$.

Si $(\mathcal{V}_k)_{k \geq 0}$ est une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{V}$, alors celui-ci est l'union disjointe des $(\mathcal{V}_k \backslash \mathcal{V}_{k+1})_{k \geq 0}$, mais bien sûr en général ce recouvrement ne sera pas admissible.

A présent, nous allons construire une bonne suite d'ouverts de l'ouvert $\mathcal{U}$ suivant le nombre de « mauvais » points de l'ensemble $U_i(\{x\})$ pour $x \in \mathcal{U}$,

Définition 4.3.3. — Soit β un rationnel avec $0 < \beta < \varepsilon$. Pour tout $x = (A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in \mathcal{U}$, soit $N(x, \beta)$ le nombre de points y de $U_i(\{x\})$ avec $\delta_i(y) \leq d_i a_i - 1 + \beta$.

Bien sûr la fonction N ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Soit N_{max} le nombre de points de $U_i(\{x\})$ pour tout x ; alors $N(x, \beta) \leq N_{max}$.

Remarque 4.3.4. — Soit $x = (A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in \mathcal{U}$ et L_0 un sous-groupe de type U_i dans $A[p]$. On note y le point de $U_i(\{x\})$ correpondant à L_0, et $(G, H_\bullet, L)$ le point de C^{BT} associé. Alors

$$\delta_i(y) = \deg\,(G[p]/L) = d_i a_i - \deg\, L$$

La condition $\delta_i(y) \leq d_i a_i - 1 + \beta$ est donc équivalente à $\deg L \geq 1 - \beta$. De plus, par définition, on a $L = F_i^+ \cdot L_0$ dans le cas (A) et $L = F_i \cdot L_0$ dans le cas (C). Le degré de L_0 est donc égal à celui de L multiplié par n, et la condition précédente se réécrit $\deg L_0 \geq n(1 - \beta)$.

Définition 4.3.5. — Soit $\mathcal{U}_k$ l'ouvert de $\mathcal{U}$ défini par

$$\mathcal{U}_k := \{x \in \mathcal{U},\ N(x, \beta) \geq k\}$$

Le fait que cet espace est effectivement un ouvert de $\mathcal{U}$ est justifié dans le lemme suivant.

Lemme 4.3.6. — *Les $(\mathcal{U}_k)_{k \geq 0}$ forment une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$.*

Démonstration. — Il est clair que $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, et que les $(\mathcal{U}_k)$ forment une suite décroissante, avec $\mathcal{U}_k = \emptyset$ si $k > N_{max}$.

Notons pour tout $k \geq 1$ l'espace de modules B_k sur K paramètrant les $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet, L_1, \dots, L_k)$ sur K, avec $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in X_{\mathrm{Iw}} \times$ Spec K, et où les L_j groupes distincts de type U_i. Soit $p_k : B_k \to X_{\mathrm{Iw}} \times$ Spec K la projection d'oubli des L_j. On note B_k^{an} l'espace analytique associé à B_k, et $B_k^{rig} = p_k^{-1}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig})$. On note encore $p_k : B_k^{rig} \to X_{\mathrm{Iw}}^{rig}$ le morphisme obtenu.

Soit $B_{k,\beta}$ le sous-espace de B_k^{rig} formé des $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet, L_j)$ avec $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in \mathcal{U}$ et deg $(L_j) \geq n(1-\beta)$ pour tout $1 \leq j \leq k$. C'est un ouvert quasi-compact de B_k^{rig}, et $\mathcal{U}_k$ est l'image par le morphisme fini et étale p_k de $B_{k,\beta}$, donc $\mathcal{U}_k$ est un ouvert quasi-compact de $\mathcal{U}$, d'après la proposition **4.1.4**. $\square$

Proposition 4.3.7. — *Soit $0 \leq k \leq N_{max}$. Sur $\mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k+1}$, on a $N(x, \beta) = k$, et on peut décomposer la correspondance géométrique de Hecke sur cet ensemble en $U_i = U_{i,k}^{good} \coprod U_{i,k}^{bad}$, où $U_{i,k}^{bad}$ correspond aux k supplémentaires L de type U_i de degré supérieur ou égal à $n(1-\beta)$.*

Démonstration. — Justifions que cette correspondance est bien finie et étale. Rappelons que la correspondance de Hecke utilise l'espace rigide C_i^{rig} paramètrant les couples $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet, L)$ avec $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in X_{\mathrm{Iw}}^{rig}$ et L de type U_i. On dispose de deux morphismes finis et étales $p_1, p_2 : C_i^{rig} \to X_{\mathrm{Iw}}^{rig}$, où p_1 est défini par l'oubli de L et p_2 par le quotient par L. Notons $X_k = \mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k+1}$, $D_k = p_1^{-1}(X_k)$ et $D_{k,\beta} \subset D_k$ le lieu (ouvert) défini par deg $L \geq n(1-\beta)$. Alors l'immersion ouverte $D_{k,\beta} \to D_k$ est quasi-compacte, et les fibres géomètriques de $p_1 : D_{k,\beta} \to X_k$ sont de cardinal constant (égal à k). D'après la proposition **4.1.8**, les restrictions de p_1 à $D_{k,\beta}$ et $D_k \backslash D_{k,\beta}$ sont finies et étales.
De plus, les morphismes $p_2 : D_{k,\beta} \to X_{\mathrm{Iw}}^{rig}$ et $p_2 : D_k \backslash D_{k,\beta} \to X_{\mathrm{Iw}}^{rig}$ sont étales car les immersions ouvertes le sont. On peut donc décomposer sur X_k l'opérateur U_i en $U_i = U_{i,k}^{good} \coprod U_{i,k}^{bad}$, où $U_{i,k}^{bad}$ est obtenu à partir de la restriction de p_1 et p_2 à $D_{k,\beta}$, et où $U_{i,k}^{good}$ est obtenu en restreignant p_1 et p_2 à $D_k \backslash D_{k,\beta}$. $\square$

Remarque 4.3.8. — Les assertions suivantes sont vérifiées.

i. Pour $k = 0$, on a sur $\mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_1$, $U_{i,0}^{bad} = \emptyset$, et $U_i = U_{i,0}^{good}$.

ii. Pour $k = N_{max}$, on a sur $\mathcal{U}_{N_{max}}$, $U_{i,N_{max}}^{good} = \emptyset$ et $U_i = U_{i,N_{max}}^{bad}$, c'est-à-dire que tous les supplémentaires sont mauvais.

iii. Si $x \in \mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k+1}$ alors $U_{i,k}^{good}(x) \subset \delta_i^{-1}(]d_i a_i - 1 + \beta, d_i a_i])$ et $U_{i,k}^{bad}(x) \subset \delta_i^{-1}([0, d_i a_i - 1 + \beta])$.

Nous aurons également besoin de faire surconverger les ouverts $\mathcal{U}_k$. Soit $\beta < \beta' < \varepsilon$.

Définition 4.3.9. — On définit l'ouvert $\mathcal{U}'_k$ par

$$\mathcal{U}'_k := \{x \in \mathcal{U}, N(x, \beta') \geq k\}$$

La suite d'ouverts $(\mathcal{U}'_k)$ vérifie alors les mêmes propriétés que celles de $(\mathcal{U}_i)$; en particulier on peut également décomposer l'opérateur de Hecke sur $\mathcal{U}'_k \backslash \mathcal{U}'_{k+1}$, qui coïncide avec la décomposition de U_i sur $(\mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k+1}) \cap (\mathcal{U}'_k \backslash \mathcal{U}'_{k+1}) = \mathcal{U}_k \backslash (\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k+1})$.

Proposition 4.3.10. — *Pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{U}'_k$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_k$.*

Démonstration. — Nous reprenons les notations des deux démonstrations précédentes. Nous avons un morphisme fini étale $p_k : B_k^{rig} \to X_{\mathrm{Iw}}^{rig}$. De plus, $\mathcal{U}_k = p_k(B_{k,\beta})$ et $\mathcal{U}'_k = p_k(B_{k,\beta'})$. Montrons que $B_{k,\beta'}$ est un voisinage strict de $B_{k,\beta}$ dans $p_k^{-1}(\mathcal{U})$. Rappelons que B_k paramètre les $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet, L_1, \dots, L_k)$, où les L_j sont de type U_i deux à deux distincts. L'ouvert quasi-compact $B_{k,\beta}$ est défini par les conditions $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in \mathcal{U}$ et $\deg L_j \geq n(1-\beta)$ pour tout $1 \leq j \leq k$. De plus, il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}_j$ sur B_k^{rig} et une section $\delta_{L_j} \in H^0(B_k^{rig}, \mathcal{L}_j)$ telle que $|\delta_{L_j}(x)| = p^{-\deg L_j(x)}$, pour tout $x \in B_k^{rig}$ (voir **[Pi]** paragraphe 2.2.2 par exemple). La condition $\deg L_j \geq n(1-\beta)$ est donc équivalente à $|\delta_{L_j}(x)| \leq p^{-n(1-\beta)}$.

On en déduit donc que le recouvrement $(B_{k,\beta'}, p_k^{-1}(\mathcal{U}) \backslash B_{k,\beta})$ est admissible puisque $\beta' > \beta$, soit que $B_{k,\beta'}$ est un voisinage strict de $B_{k,\beta}$. Le morphisme p_k étant fini et étale, $\mathcal{U}'_k$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_k$ d'après la proposition **4.1.7**. □

4.4. Décomposition de U_i^N. —

Dans la section précédente, nous avons recouvert l'ouvert $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\gamma$ suivant le nombre de mauvais supplémentaires, et avons ainsi décomposé la correspondance de Hecke en chaque point de $\mathcal{U}$ en $U_i = U_i^{good} + U_i^{bad}$, avec U_i^{good} d'image incluse dans $\delta_i^{-1}(]d_i a_i - 1 + \beta, d_i a_i])$, pour un certain $\beta > 0$. Il est possible d'itérer cette correspondance, et de décomposer la correspondance de Hecke U_i^N.

Théorème 4.4.1. — *Soit $N \geq 1$, $\gamma < \varepsilon$ et $\beta < \varepsilon$. Il existe un ensemble fini totalement ordonné $S_N \simeq \{0, 1, \dots, L(N)\}$, avec $L(N)$ indépendant de γ (qui sera défini par récurrence) et une bonne suite d'ouverts $(\mathcal{U}_k(N))_{k \in S_N}$ de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\gamma$ de longueur $L(N)$, tels que pour tout $0 \leq k \leq L(N) - 1$, on peut décomposer la correspondance U_i^N sur $\mathcal{U}_k(N) \backslash \mathcal{U}_{k+1}(N)$ en*

$$U_i^N = \left(\coprod_{j=0}^{N-1} U_i^{N-1-j} \circ T_j \right) \coprod T_N$$

avec :

$$T_0 = U_{i,k,N}^{good}$$

$$T_j = \coprod_{k_1 \in S_{N-1}, \dots, k_j \in S_{N-j}} U_{i,k_j,N}^{good} U_{i,k_{j-1},k_j,N}^{bad} \dots U_{i,k,k_1,N}^{bad} \text{ pour } 0 < j < N$$

$$T_N = \coprod_{k_1 \in S_{N-1}, \dots, k_{N-1} \in S_1} U_{i,k_{N-1},N}^{bad} U_{i,k_{N-2},k_{N-1},N}^{bad} \dots U_{i,k,k_1,N}^{bad}$$

de telle manière que

i. *les images des opérateurs $U_{i,j,N}^{good}$ $(j \in S_k)$ sont incluses dans $\delta_i^{-1}(]d_i a_i - 1 + \beta, d_i a_i])$.*

ii. *les images des opérateurs $U_{i,l,l',N}^{bad}$ $(l \in S_k,\ l' \in S_{k-1})$ et $U_{i,l,N}^{bad}$ $(l \in S_1)$ sont incluses dans $\delta_i^{-1}([0, d_i a_i - 1 + \beta])$*

Enfin, pour toute bonne suite d'ouverts $(\mathcal{U}_k(N))$ de $\mathcal{U}$ construite dans la preuve, il est possible de la faire surconverger, c'est-à-dire que si $\beta' > \beta$, et si $(\mathcal{U}'_k(N))$ est la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$ obtenue pour β', alors $\mathcal{U}'_k(N)$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_k(N)$ pour tout k.

Démonstration. — Nous allons démontrer ce résultat par récurrence, ce qui permettra de construire explicitement les ensembles S_j ainsi que les différents opérateurs intervenant dans la preuve. Pour $N = 1$, le résultat est démontré dans le paragraphe précédent. Remarquons que l'on a $S_1 = \{0, 1, \ldots, N_{max}\}$. Supposons le résultat vrai pour $N \geq 1$ et démontrons le pour $N + 1$.

Soient donc $\gamma < \varepsilon$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\gamma$, et $\beta < \varepsilon$. Dans le paragraphe précédent, nous avons défini une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$, et décomposé sur chaque différence de deux ouverts consécutifs de la suite l'opérateur U_i en $U_i^{good} \coprod U_i^{bad}$, où l'image de U_i^{good} est incluse dans

$$\delta_i^{-1}(]d_i a_i - 1 + \beta, d_i a_i])$$

et l'opérateur U_i^{bad} est obtenu en quotientant par des sous-groupes de degré supérieur ou égal à $1-\beta$. L'image de U_i^{bad} est donc incluse dans $\delta_i^{-1}([0, d_i a_i - 1 + \beta]) =: \mathcal{V}$. On peut alors appliquer le théorème au rang N à $\mathcal{V}$: il existe une suite décroissante d'ouverts quasi-compacts $(\mathcal{V}_k)_{k \in S_N}$ de $\mathcal{V}$, avec $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_{L+1} = \emptyset$ si $L + 1$ est le cardinal de S_N, et une décomposition de U_i^N sur $\mathcal{V}_k \backslash \mathcal{V}_{k+1}$ pour $k \in S_N$.

Nous devons maintenant recouvrir l'ouvert $\mathcal{U}$, suivant non seulement le nombre de mauvais supplémentaires, mais également suivant l'image dans $\mathcal{V}$ de ces mauvais supplémentaires. Ainsi, nous allons compter le nombre de supplémentaires, non plus dans $\mathcal{V}$ (c'est ce qui a été fait pour la décomposition de U_i), mais dans chacun des $\mathcal{V}_k \backslash \mathcal{V}_{k+1}$. Soit S_{N+1} l'ensemble des suites décroissantes d'entiers positifs ou nuls

$$N_{max} \geq m_0 \geq \cdots \geq m_L$$

où $L + 1$ est le cardinal de S_N. On posera $m_{-1} = N_{max}$. L'ensemble S_{N+1} s'identifie donc à l'ensemble des fonctions sur S_N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, décroissantes et majorées par N_{max}. C'est bien un ensemble fini ; de plus, nous pouvons ordonner cet ensemble par l'ordre lexicographique : si $\underline{n} = (n_i)$ et $\underline{m} = (m_i)$ sont deux telles suites distinctes, et si j est le premier indice tel que $n_j \neq m_j$, on dit que $\underline{n} < \underline{m}$ si $n_j < m_j$. Si $\underline{m} = (m_j)$, le successeur de $\underline{m}$ est alors défini de la façon suivante : soit $j \geq -1$ le plus grand entier tel que $m_j > m_{j+1}$ (qui existe bien si $\underline{m}$ n'est pas la suite constante égale à N_{max}), alors

$$\underline{m} + 1 = (m_0, \ldots, m_j, m_{j+1} + 1, 0, \ldots, 0)$$

Définissons maintenant la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$. Pour tout $x = (A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet) \in \mathcal{U}$ et $k \in S_N$, soit $N_k(x)$ le nombre de supplémentaires L de type U_i avec

$$y_L = (A/L, \iota', \lambda', \eta', H'_\bullet) \in \mathcal{V}_k\ .$$

Remarquons que le fait que y_L appartienne à $\mathcal{V}_k$ implique que $\delta_i(y_L) \leq d_i a_i - 1 + \beta$, soit $\deg(L) \geq n(1 - \beta)$. En particulier, les fonctions N_k sont bornées par N_{max}. De plus, $N_k(x)$ est également le cardinal de $U_i(x) \cap \mathcal{V}_k$. La fonction $k \to N_k(x)$ définit un élément de S_{N+1} noté $N_\bullet(x)$. Pour $\underline{m} \in S_{N+1}$, on définit

$$\mathcal{U}_{\underline{m}} := \{x \in \mathcal{U}, N_\bullet(x) \geq \underline{m}\}$$

Si $\underline{m} = (N_{max}, \ldots, N_{max})$, définissons $\mathcal{U}_{\underline{m}+1}$ comme étant l'ensemble vide. Il est possible de donner une autre description de l'ensemble $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ par le lemme suivant.

Lemme 4.4.2. — *Soit $\underline{m} \in S_{N+1}$. On a*

$$\mathcal{U}_{\underline{m}} := \bigcap_{j \in S_N} \left(\bigcup_{k<j} \{x \in \mathcal{U}, N_k(x) \geq m_k + 1\} \cup \{x \in \mathcal{U}, N_j(x) \geq m_j\} \right)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{U}$, et on note $N_\bullet(x) = (n_k)_{k \in S_N}$. Si $N_\bullet(x) = \underline{m}$, on pose k_0 égal à l'infini ; sinon soit k_0 l'unique élément de S_N tel que $n_k = m_k$ pour $k < k_0$, et $n_{k_0} \neq m_{k_0}$.
Si $x \in \mathcal{U}_{\underline{m}}$, alors soit k_0 est infini, soit $n_{k_0} > m_{k_0}$. On vérifie alors que pour tout $j \in S_N$, on a

$$x \in \bigcup_{k<j} \{x \in \mathcal{U}, N_k(x) \geq m_k + 1\} \cup \{x \in \mathcal{U}, N_j(x) \geq m_j\}$$

Cela découle du fait que $n_j \geq m_j$ si $j \leq k_0$, et du fait que $n_{k_0} \geq m_{k_0} + 1$ si $j > k_0$.
Supposons maintenant que $x \notin \mathcal{U}_{\underline{m}}$. Alors k_0 est fini, et on a $n_{k_0} < m_{k_0}$. On vérifie alors que x n'est pas dans l'ensemble

$$\bigcup_{k<k_0} \{x \in \mathcal{U}, N_k(x) \geq m_k + 1\} \cup \{x \in \mathcal{U}, N_{k_0}(x) \geq m_{k_0}\}$$

□

Cette description alternative nous permet de prouver que les ensembles $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ sont bien des ouvert quasi-compacts.

Lemme 4.4.3. — *Pour tout $\underline{m} \in S_{N+1}$, $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ est un ouvert quasi-compact.*

Démonstration. — Les intersections et unions intervenant dans le lemme précédent étant finies, il suffit de montrer que $\mathcal{U}_{k,l} := \{x \in \mathcal{U}, N_l(x) \geq k\}$ est un ouvert quasi-compact de $\mathcal{U}$.
Soit B_k^0 le sous-espace de B_k^{rig} paramétrant un couple $(A, \iota, \lambda, \eta, H_\bullet, L_1, \ldots, L_k)$ avec $(A, \iota, \lambda, \eta, H_j) \in \mathcal{U}$ et $L_1, \ldots, L_k$ des supplémentaires de type U_i distincts. On dispose du morphisme d'oubli des L_j, $p : B_k^0 \to \mathcal{U}$, ainsi que d'un morphisme $q : B_k^0 \to (X_{\mathrm{Iw}}^{rig})^k$, la j-ième composante étant donnée par le quotient par L_j. Alors

$$\mathcal{U}_{k,l} = p(q^{-1}(\mathcal{V}_l^k))$$

Comme $\mathcal{V}_l$ est un ouvert quasi-compact et que p et q sont finis et étales, $\mathcal{U}_{k,l}$ est également un ouvert quasi-compact. □

De plus, la suite $(\mathcal{U}_{\underline{m}})$ est décroissante, donc définit une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$. Décomposons maintenant la correspondance de Hecke sur chacun des ouverts $\mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$.

Lemme 4.4.4. — *Pour tout $\underline{m} \in S_{N+1}$, et $x \in \mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, on a $N_j(x) = m_j$ pour tout $j \in S_N$.*

Démonstration. — Si $\underline{m}$ est égal à la suite constante égale à N_{max}, le résultat est clair, car les fonctions N_i sont bornées par N_{max}. Sinon, le résultat découle de la définition de l'ensemble $\mathcal{U}_{\underline{m}}$. □

Finissons maintenant la démonstration du théorème **4.4.1**. Soit $\underline{m} \in S_{N+1}$; alors pour tout $x \in \mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, il y a exactement m_k points dans $U_i(x) \cap \mathcal{V}_k$, pour tout $k \in S_N$. Il y a donc $m_k - m_{k+1}$ points dans $U_i(x) \cap (\mathcal{V}_k \backslash \mathcal{V}_{k+1})$, et $N_{max} - m_0$ points dans $U_i(x) \cap (X_{\mathrm{Iw}}^{rig} \backslash \mathcal{V}_0)$. On peut alors décomposer l'opérateur de Hecke sur $\mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$ en

$$U_i = U_{i,\underline{m}}^{good} \coprod_{k \in S_N} U_{i,\underline{m},k}^{bad}$$

où l'opérateur $U_{i,\underline{m}}^{good}$ correspond aux $N_{max}-m_0$ points dans $X_{\mathrm{Iw}}^{rig}\backslash\mathcal{V}_0 \subset \delta_i^{-1}(]d_ia_i-1+\beta, d_ia_i])$ et $U_{i,\underline{m},k}^{bad}$ aux $m_k - m_{k+1}$ points dans $\mathcal{V}_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}$. En effet, d'après la proposition **4.1.8**, sur $\mathcal{U}_{\underline{m}}\backslash\mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, on peut décomposer l'opérateur U_i en

$$U_{i,\underline{m}}^{good} \coprod U_{i,\underline{m}}^{bad}$$

où $U_{i,\underline{m}}^{good}$ correspond aux $N_{max}-m_0$ points dans $X_{\mathrm{Iw}}^{rig}\backslash\mathcal{V}_0$ et $U_{i,\underline{m}}^{bad}$ aux m_0 points dans $\mathcal{V}_0$. En appliquant à nouveau la proposition **4.1.8**, on voit qu'on peut décomposer $U_{i,\underline{m}}^{bad}$ en

$$U_{i,\underline{m},0}^{bad} \coprod \widetilde{U_{i,\underline{m},0}^{bad}}$$

où $U_{i,\underline{m},0}^{bad}$ correspond aux $m_0 - m_1$ points dans $\mathcal{V}_0\backslash\mathcal{V}_1$ et $\widetilde{U_{i,\underline{m},0}^{bad}}$ aux m_1 points dans $\mathcal{V}_1$. En itérant ce processus, on obtient bien la décomposition de U_i annoncée.

Or par récurrence, nous avons une décomposition de U_i^N sur $\mathcal{V}_i\backslash\mathcal{V}_{i+1}$, ce qui donne une décomposition de U_i^{N+1} sur $\mathcal{U}_{\underline{m}}\backslash\mathcal{U}_{\underline{m}+1}$. L'opérateur $U_{i,\underline{m}}^{good}$ est bien d'image incluse dans $\delta_i^{-1}(]d_ia_i-1+\beta, d_ia_i])$, et les opérateurs $U_{i,\underline{m},j}^{bad}$ ont une image incluse dans $\mathcal{V} = \delta_i^{-1}([0, d_ia_i-1+\beta])$.

Enfin, il possible de faire surconverger la décomposition précédente en prenant $\beta < \beta'$. On obtient alors des ouverts $\mathcal{V}', \mathcal{V}_j'$ et $\mathcal{U}_{\underline{m}}'$. L'ouvert $\mathcal{V}'$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}$, et par hypothèse de récurrence, les ouverts $\mathcal{V}_j'$ sont des voisinages stricts de $\mathcal{V}_j$ dans $\mathcal{V}'$, donc les $\mathcal{U}_{\underline{m}}'$ sont des voisinages stricts de $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ dans $\mathcal{U}$. □

Le lemme suivant est évident d'après les définitions (voir [**Pi**, prop. 5.2]).

Lemme 4.4.5. — *Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de X_{Iw}^{rig} et $1 \leqslant i \leqslant h$. On suppose qu'un opérateur U_i^{bad} est défini sur $\mathcal{V}$, et que celui ne fait intervenir que des sous-groupes L_0 de type U_i, avec*

$$deg\ L \geq \nu$$

où $L = F_i^+ \cdot L_0$ dans le cas (A) et $L = F_i \cdot L_0$ dans le cas (C). On a

$$\left|U_i^{bad}\right|_{\mathcal{V}} \leqslant p^{d_ia_ib_i - \nu \inf_{1\leq j\leq d_i}(k_{i,j,a_i}+l_{i,j,b_i})}$$

dans le cas (A) et

$$\left|U_i^{bad}\right|_{\mathcal{V}} \leqslant p^{d_ia_i(a_i+1)/2 - \nu \inf_{1\leq j\leq d_i} k_{i,j,a_i}}$$

dans le cas (C). Dans les deux cas, k_{i,j,a_i} et l_{i,j,b_i} sont des composantes du vecteur κ selon l'écriture donnée au début de la partie 4.

4.5. Séries de Kassaei. — Suivant une idée introduite par Kassaei dans [**Ka**] pour le groupe GL_2 sur $\mathbb{Q}$, nous allons définir des séries approximant le prolongement voulu de f sur certaines zones de X_{Iw}^{rig}. Dans le reste de l'article, sauf mention explicite du contraire on suppose satisfaite l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.5.1. — Pour tout $1 \leqslant i \leqslant h$ on a $\inf_{1\leq j\leq d_i}(k_{i,j,a_i}+l_{i,j,b_i}) > v(\alpha_i) + d_ia_ib_i$ dans le cas (A) et $\inf_{1\leq j\leq d_i} k_{i,j,a_i} > v(\alpha_i) + d_ia_i(a_i+1)/2$ dans le cas (C).

La condition sur le poids va nous garantir, grace au lemme **4.4.5**, que les opérateurs $\alpha_i^{-1}U_i^{bad}$ sont de normes strictement inférieures à 1.

Supposons que f est une forme modulaire surconvergente vérifiant l'hypothèse précédente. Nous avons déjà montré que f s'étendait à $X_{\mathrm{Iw}}(1^-) = \delta^{-1}(]d_1a_1-1,d_1a_1]\times\cdots\times]d_ha_h-1,d_ha_h])$. Pour prolonger f à X_{Iw}^{rig}, nous allons procéder direction par direction, en utilisant le fait que f est propre pour chacun des opérateurs U_i. Plus précisément, en utilisant le fait que f est propre pour U_1, et la relation vérifiée par la valeur propre α_1, nous allons prolonger f à $\delta^{-1}([0,d_1a_1]\times]d_2a_2-1,d_2a_2]\times\cdots\times]d_ha_h-1,d_ha_h])$. En répétant ce processus, et en utilisant le fait que f est propre pour $U_2,\dots,U_h$, on prolongera f à tout X_{Iw}^{rig}.

Fixons un entier i entre 1 et h, et soit I_j un intervalle de $[0,d_ja_j]$ pour tout $j\neq i$. On suppose que f est définie sur l'ouvert $\mathcal{W} := \delta^{-1}(I_1\times\cdots\times I_{i-1}\times]d_ia_i-1,d_ia_i]\times I_{i+1}\times\cdots\times I_h)$. Nous allons prolonger f à $\mathcal{W}_0 := \delta^{-1}(I_1\times\cdots\times I_{i-1}\times[0,d_ia_i]\times I_{i+1}\times\cdots\times I_h)$.
Soit ε un rationnel strictement positif tel que

$$d_ia_ib_i + v(\alpha_i) < (1-\varepsilon)\inf_{1\leq j\leq d_i}(k_{i,j,a_i}+l_{i,j,b_i})$$

dans le cas (A) et

$$\frac{d_ia_i(a_i+1)}{2} + v(\alpha_i) < (1-\varepsilon)\inf_{1\leq j\leq d_i} k_{i,j,a_i}$$

dans le cas (C). Cela est possible par l'hypothèse **4.5.1**. Fixons γ un rationnel strictement positif avec $\gamma<\varepsilon$. Dans la partie **4.4**, nous avons obtenu une bonne suite d'ouverts de l'ouvert $\mathcal{U} = \delta^{-1}(I_1\times\cdots\times I_{i-1}\times[0,d_ia_i-1+\gamma]\times I_{i+1}\times\cdots\times I_h)$ qui a permis de décomposer l'opérateur de Hecke. Nous allons maintenant utiliser cette décomposition.

Soient $N\geq 1$, et β_0 un rationnel strictement inférieur à ε. Soit $(\mathcal{U}_k)_{k\in S_N}$ la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$ obtenue dans la partie **4.4** pour β_0. De plus, nous avons vu qu'il était possible de faire surconverger toute bonne suite d'ouverts ainsi construite : soit donc (β_l) une suite de rationnels strictement croissante bornée par ε, et pour tout $l\geq 1$,

$$(\mathcal{U}_k^{(l)})$$

la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$ construite pour β_l. Alors $\mathcal{U}_k^{(l)}$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_k^{(l-1)}$ dans $\mathcal{U}$, pour tout $k\in S_N$. On notera également

$$\mathcal{U}_k^{(0)} = \mathcal{U}_k\,.$$

Soient alors $\mathcal{V}_k = \mathcal{U}_k^{(k-1)}$ pour $k\geq 1$ et $\mathcal{V}'_k = \mathcal{U}_k^{(k)}$ pour $k\geq 0$. Alors $\mathcal{V}'_k$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}_k$ pour tout $k\geq 1$. Nous avons décomposé l'opérateur U_i^N sur $\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}$ en

$$U_i^N = \sum_{j=0}^{N-1} U_i^{N-1-j}T_j + T_N$$

avec $T_0 = U_{i,k}^{good}$, et pour $0<j<N$

$$T_j = \sum_{k_1\in S_{N-1},\dots,k_j\in S_{N-j}} U_{i,k_j}^{good}U_{i,k_{j-1},k_j}^{bad}\dots U_{i,j,k_1}^{bad}$$

et

$$T_N = \sum_{k_1\in S_{N-1},\dots,k_{N-1}\in S_1} U^{bad}_{i,k_{N-1}} U^{bad}_{i,k_{N-2},k_{N-1}} \dots U^{bad}_{i,k,k_1}$$

Les images de $U^{good}_{i,k}$ et de U^{good}_{i,k_j} ($k_j \in S_{N-j}$) sont incluses dans $\delta_i^{-1}([d_ia_i - 1 + \beta_0, d_ia_i])$, et les opérateur $U^{bad}_{i,k,j}$, $U^{bad}_{i,k}$ ne font intervenir que des supplémentaires L de type U_i de degré strictement supérieur à $n(1-\varepsilon)$ (et ont donc leurs images incluses dans $\delta_i^{-1}([0, d_ia_i - 1 + \varepsilon[))$.

Définition 4.5.2. — Les séries de Kassaei sur $\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}$ sont définies par

$$f_{N,k} := \alpha_i^{-1} U^{good}_{i,k} f + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k_1\in S_{N-1},\dots,k_j\in S_{N-j}} \alpha_i^{-j-1} U^{bad}_{i,j,k_1} \dots U^{bad}_{i,k_{j-1},k_j} U^{good}_{i,k_j} f$$

Cette fonction est bien définie, puisque les opérateurs $U^{good}_{i,k}$ sont soit nuls, auquel cas leur action sur f donne 0, soit à valeurs dans

$$\delta_i^{-1}([d_ia_i - 1 + \beta_0, d_ia_i]) \cap \mathcal{W}_0$$

et f est définie sur cet espace. Ce dernier espace étant quasi-compact, f y est bornée, disons par M. Le lemme **4.4.5** permet de majorer la norme des opérateurs $\alpha_i^{-1}U^{bad}_{i,j,k}$, qui est inférieure à u_0, avec

$$u_0 = p^{d_ia_ib_i + v(\alpha_i) - (1-\varepsilon)\inf_j (k_{i,j,a_i} + l_{i,j,b_i})}$$

dans le cas (A) et

$$u_0 = p^{d_ia_i(a_i+1)/2 + v(\alpha_i) - (1-\varepsilon)\inf_j k_{i,j,a_i}}$$

dans le cas (C). D'après l'hypothèse **4.5.1** et le choix de ε, on a $u_0 < 1$.

Lemme 4.5.3. — *Les fonctions $f_{N,k}$ sont uniformément bornées.*

Démonstration. — On a

$$|\alpha_i^{-j-1} U^{bad}_{i,k,k_1} \dots U^{bad}_{i,k_{j-1},k_j} U^{good}_{i,k_j} f|_{\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}} \leq u_0^j |\alpha_i^{-1} U^{good}_{i,k_j} f|_{U^{bad}_{i,k_{j-1},k_j}\dots U^{bad}_{i,k,k_1}(\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1})} \leq |\alpha_i^{-1}| p^{n_i} M$$

car la norme de U^{good}_{p,i_k} est majorée par p^{n_i}, où n_i est le terme de normalisation de l'opérateur de Hecke défini dans la partie **2.3**. On peut donc majorer la fonction $f_{N,k}$ par

$$|f_{N,k}|_{\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}} \leq |\alpha_i^{-1}| p^{n_i} M$$

ce qui prouve que les fonctions $f_{N,k}$ sont uniformément bornées. □

Remarque 4.5.4. — Sur l'espace $\{x, U_i^N(x) \cap \mathcal{U} = \emptyset\}$, on aurait pu définir $f_{N,k}$ par $\alpha_i^{-N}U_i^N f$. Le fait de définir $f_{N,k}$ comme une série de Kassaei permet cependant de majorer plus facilement cette fonction.

Nous avons donc défini une fonction $f_{N,k}$ sur $\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}$. Ces fonctions étant uniformément bornées, nous pouvons supposer qu'elles sont à valeurs entières. Nous allons maintenant les recoller pour définir une fonction sur tout $\mathcal{U}$.

Lemme 4.5.5. — *Soient $j, k \in S_N$ et $x \in (\mathcal{V}'_j\backslash\mathcal{V}_{j+1}) \cap (\mathcal{V}'_k\backslash\mathcal{V}_{k+1})$. Alors*

$$|(f_{N,j} - f_{N,k})(x)| \leq u_0^N M$$

Démonstration. — Il existe une autre manière de définir les séries de Kassaei $f_{N,j}$. En effet, on aurait pu décomposer l'opérateur U_i^N en $U_i^{N,good} + U_i^{N,bad}$ suivant les degrés des points de U_i^N : l'image de $U_i^{N,good}$ est incluse dans

$$\delta_i^{-1}(]d_i a_i - 1 + \beta, d_i a_i])$$

et celle de $U_i^{N,bad}$ dans $\delta_i^{-1}([0, d_i a_i - 1 + \beta])$, pour un certain rationnel β compris entre β_0 et ε. La série de Kassaei est alors définie comme

$$\alpha_i^{-N} U_i^{N,good} f \,.$$

La série de Kassaei $f_{N,j}$ est définie à l'aide d'un rationnel β comme précédemment ; au-dessus du point x on peut donc décomposer l'opérateur U_i^N en

$$U_i^{N,good} + U_{i,N}^{N,bad}$$

avec $f_{N,j}(x) = \alpha_i^{-N} U_i^{N,good} f(x)$. De même, la série $f_{N,k}$ est définie à l'aide d'un rationnel β', et au-dessus de x, on a la décomposition

$$U_i^N = U_i^{N,good'} + U_i^{N,bad'}$$

avec $f_{N,k}(x) = \alpha_i^{-N} U_i^{N,good'} f(x)$. Supposons par exemple que $k < j$. On a alors $\beta' < \beta$, et au-dessus de x, l'opérateur $U_i^{N,bad}$ se décompose en

$$U_i^{N,bad'} + U_i^{N,bad''}$$

avec l'opérateur $U_i^{N,bad''}$ ayant son image incluse dans $\delta_i^{-1}(]d_i a_i - 1 + \beta', d_i a_i - 1 + \beta])$. On a alors $f_{N,k}(x) - f_{N,j}(x) = \alpha_i^{-N} U_i^{N,bad''} f(x)$. De plus, la norme de de l'opérateur $\alpha_i^{-N} U_i^{N,bad''}$ est inférieure à u_0^N d'après les calculs sur les normes des opérateurs de Hecke. D'où

$$|(f_{N,j} - f_{N,k})(x)| \leq u_0^N |f|_{U_i^{N,bad''}(x)}$$

De plus, l'ensemble $U_i^{N,bad''}(x)$ étant inclus dans $\delta_i^{-1}([d_i a_i - 1 + \beta_0, d_i a_i])$, on a $|f|_{U_i^{N,bad''}(x)} \leq M$ ce qui donne la majoration. □

Proposition 4.5.6. — *Il existe un entier A_N telle que les fonctions $(f_{N,k})_{k \in S_N}$ se recollent en une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.*

Démonstration. — La décomposition de l'ouvert $\mathcal{U}$ étant finie, soit L tel que $\mathcal{V}_{L+1}$ soit vide. La fonction $f_{N,L}$ est donc définie sur $\mathcal{V}'_L$. La fonction $f_{N,L-1}$ est elle définie sur $\mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L$. De plus, d'après le lemme précédent, on a

$$|f_{N,L-1} - f_{N,L}|_{(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L} \leq u_0^N M$$

Soit A_N tel que $u_0^N M \leq p^{-A_N}$; comme $u_0 < 1$, la suite (A_N) tend vers l'infini. Les fonctions $f_{N,L-1}$ et $f_{N,L}$ sont donc égales modulo p^{A_N} sur $(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L$. Comme $(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}, \mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L)$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{V}'_{L-1}$, celles-ci se recollent en une fonction $g_{N,L-1} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-1}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$. De même, $g_{N,L-1}$ et $f_{N,L-2}$ sont égales (modulo p^{A_N}) sur $(\mathcal{V}'_{L-2} \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_{L-1}$, et donc se recollent en $g_{N,L-2} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-2}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$. En répétant ce processus, on voit que les fonctions $f_{N,k}$ se recollent toutes modulo p^{A_N} sur $\mathcal{V}'_0 = \mathcal{U}$, et définissent donc une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$. □

Proposition 4.5.7. — *Les fonctions* (g_N) *définissent un système projectif dans* $\lim\limits_{\leftarrow m} H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa/p^m)$.

Démonstration. — Nous allons prouver que g_{N+1} et g_N sont égales modulo p^{A_N}. Soit $x \in \mathcal{U}$; nous avons construit en x les séries de Kassaei $f_{N,k}$ et $f_{N+1,j}$. Or le terme $f_{N+1,j}$ provient d'une décomposition de U_i^{N+1} du type

$$U_i^{N+1} = \sum_{l=0}^{N} U_i^{N-l} T_l + T_{N+1}$$

Nous pouvons donc écrire $f_{N+1,j} = h_1 + h_2$, la fonction h_1 étant associée à l'opérateur $\sum_{l=0}^{N-1} U_i^{N-l} T_l$ et h_2 à T_N. Or la fonction h_1 est en réalité une série de Kassaei pour une certaine décomposition de U_i^N : le lemme précédent donne donc

$$|(f_{N,i} - h_1)(x)| \leq p^{-A_N}$$

De plus, on a

$$h_2 = \sum_{k_1 \in S_1, \ldots, k_N \in S_N} \alpha_i^{-N-1} U_{i,j,k_1}^{bad} \ldots U_{i,k_{N-1},k_N}^{bad} U_{i,k_N}^{good} f$$

donc comme les opérateurs $\alpha_i^{-1} U_{i,l,l'}^{bad}$ ont une norme inférieure à u_0,

$$|h_2(x)| \leq u_0^N p^{n_i} |\alpha_i^{-1}| M = p^{-A'_N}$$

avec $A'_N = A_N - n_i - v(\alpha_i)$. Quitte à remplacer A_N par A'_N, on voit donc que la réduction de g_{N+1} modulo p^{A_N} est égal à g_N. $\square$

En utilisant la proposition de recollement (lemme **4.1.2**), on voit donc que les fonctions g_N définissent une fonction $g \in H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$. Bien sûr, g se recolle avec f sur $\mathcal{W}$.
En effet, si $x \in \mathcal{W}$, il existe N_0 tel que $U_i^N(x) \subset \delta_i^{-1}([d_i a_i - 1 + \varepsilon, d_i a_i])$ pour $N \geq N_0$, et la série de Kassaei est alors stationnaire égale à

$$\alpha_i^{-N_0} U_i^{N_0} f$$

Nous avons donc étendu f sur $\mathcal{W}_0 = \delta^{-1}(I_1 \times \cdots \times I_{i-1} \times [0, d_i a_i] \times I_{i+1} \times \cdots \times I_h)$.

Proposition 4.5.8. — *La forme modulaire* f *s'étend en un élément de* $H^0(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}, \omega^\kappa)$.

Démonstration. — La forme modulaire f est définie sur $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$. D'après ce qui précéde, on peut prolonger f à $\delta^{-1}([0, d_1 a_1] \times]d_2 a_2 - 1, d_2 a_2] \times \cdots \times]d_h a_h - 1, d_h a_h])$, en utilisant le fait que f est propre pour U_1 et la relation vérifiée par a_1. En utilisant l'opérateur U_2, on prolonge alors f à $\delta^{-1}([0, d_1 a_1] \times [0, d_2 a_2] \times]d_3 a_3 - 1, d_3 a_3] \times \cdots \times]d_h a_h - 1, d_h a_h])$. En répétant ce processus, on prolonge donc f à tout X_{Iw}^{rig}. $\square$

5. Principe de Köcher rigide et classicité

Soit $f \in \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}, \omega^\kappa)$ une forme modulaire rigide-analytique de poids $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$. Dans cette partie, nous montrons que lorsque la dimension complexe de l'espace symétrique de G est > 1, la forme f est algébrique donc provient d'une section de

$$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\ \omega^\kappa)\ .$$

La démonstration s'effectue en deux temps : prolongement de f aux compactifications toroïdales définies dans [**La4**] grâce à un principe de Köcher formel puis algébrisation de ce prolongement à la « GAGA ».

5.1. Compactifications. — Soit $\mathfrak{S}$ une décomposition polyédrale projective pour la variété de Shimura $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ dans le sens de [**La4**, déf.2.7]. Elle existe par [**La4**, prop.2.8]. D'après [**La4**, par.3], il existe alors un schéma $X_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ dont la fibre générique est la compactification toroïdale de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ associée au choix combinatoire $\mathfrak{S}$.

De plus, $X_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ contient X_{Iw} comme ouvert dense [**La3**, rem.16.5]. On utilise ici la construction de $X_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ comme compactification d'un normalisé de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ dans une variété de Siegel auxiliaire [**La3**, rem.13.12] et le fait que X_{Iw} est normal. Cette normalité résulte soit de [**He**], soit de [**St**, prop. 3.1.7.1], tenant compte de [**G1**] dans le cas (A) et [**G2**] dans le cas (C).

Rappelons qu'on a défini dans le paragraphe **1.2** une variété de Shimura X lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ car sans niveau en p. D'après [**La1**, th.6.4.1.1] il existe une compactification toroïdale $X^{\mathfrak{S}}$ associée au choix combinatoire $\mathfrak{S}$. D'après [**La4**, prop.7.3], le morphisme d'oubli $X_{\mathrm{Iw}} \to X$ s'étend en un morphisme $X_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \to X^{\mathfrak{S}}$.

Pour tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$ on dispose d'un faisceau automorphe cohérent localement libre ω^κ sur $X^{\mathfrak{S}}$ étendant canoniquement le faisceau déjà défini sur X. Pour tout $n \geq 1$, la restriction de ce faisceau à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n)$ est de plus formellement canonique dans le sens de [**La4**, déf.8.5] par [**La2**, coro.5.8,5.9]. On en déduit par image inverse un faisceau localement libre ω^κ sur $X_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ qui est formellement canonique modulo toutes les puissances de π.

5.2. Principe de Köcher. — Supposons dans ce paragraphe que la dimension complexe de l'espace symétrique de G est > 1. En utilisant les notations du paragraphe **1.1**, on suppose donc $d > 1$ ou $a_1 > 1$ si $d = 1$. On dispose alors du principe de Köcher qui montre que les sections de ω^κ sur $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n)$ s'étendent à $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n)$ pour tout $n \geq 1$.

Proposition 5.2.1. — *Pour tout $n \geq 1$ et tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$, l'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n),\, \omega^\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n),\, \omega^\kappa)\,.$$

Démonstration. — C'est [**La4**, th.8.7] tenant compte du fait que ω^κ est formellement canonique sur $X_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n)$ pour tout $n \geq 1$. □

Notons $\bar{\mathfrak{X}}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ et $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}$ les complétions formelles π-adiques de $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ et de X_{Iw}. On obtient le corollaire suivante en prenant la limite projective sur $n \geq 1$.

Corollaire 5.2.2. — *Pour tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$, l'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}},\, \omega^\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}},\, \omega^\kappa)\,.$$

On en déduit le principe de Köcher rigide suivant en passant aux fibres génériques rigides.

Corollaire 5.2.3. — *Pour tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$, l'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left((\bar{\mathfrak{X}}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}})^{rig},\, \omega^\kappa\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{rig},\, \omega^\kappa\right)\,.$$

Rappelons le corollaire suivant du principe « GAGA » en géométrie rigide-analytique [**Ki**].

Proposition 5.2.4. — *Le morphisme d'analytification suivant est un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left((\bar{\mathfrak{X}}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}})^{rig},\, \omega^\kappa\right)$$

5.3. Le critère de classicité. — Combinons à présent divers résultats démontrés dans cet article et énonçons le théorème principal. Il généralise le critère de classicité de Coleman [**Co**] à toutes les variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à un groupe déployé sur $\mathbb{Q}_p$.

Théorème 5.3.1. — *Soit X_{Iw} une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau iwahorique en p associée à des données PEL vérifiant l'hypothèse **1.1.1**. Soit $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$ un poids dominant et $f \in \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}}, \kappa)^\dagger$ une forme modulaire surconvergente de poids κ. Supposons f propre pour U_i de valeur propre non nulle pour tout $1 \leqslant i \leqslant h$. Supposons κ grand devant les valuation p-adiques de ces valeurs propres dans le sens de l'hypothèse **4.5.1**. La forme f est classique, c'est-à-dire dans l'image de l'injection*

$$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa) \hookrightarrow \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\, \kappa)^\dagger\,.$$

Démonstration. — Lorsque G ne vérifie pas l'hypothèse **1.4.2** donc a le demi-plan de Poincaré pour espace symétrique, le théorème résulte de [**Co**] ou de [**Ka**]. Supposons donc que la dimension complexe de l'espace symétrique de G soit > 1. Grâce à la proposition **4.5.8**, la forme f est dans l'image du morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}^{rig},\, \omega^\kappa) \hookrightarrow \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\, \kappa)^\dagger\,.$$

On conclut en appliquant le corollaire **5.2.3** et les propositions **5.2.4** et **5.2.1** en vertu desquels les morphismes suivants de restriction et d'analytification sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0\left(\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\left((\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}})^{rig},\, \omega^\kappa\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^0\left(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\left(X_{\mathrm{Iw}}^{rig},\, \omega^\kappa\right)
\end{array}$$

□

Remarque 5.3.2. — Nous aurions pu démontrer la classicité de f lorsque l'espace symétrique de G est de dimension un sans recourir à [**Co**] et [**Ka**]. Il aurait fallu mener l'étape de prolongement analytique de la partie 4 en tenant compte des pointes de la variété de Shimura, qui est essentiellement une courbe modulaire dans ce cas.

Références

[AIP] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni, *p-adic families of Siegel modular cuspforms*, Annals of Math. **181** (2015)

[AM] A. Abbes et F. Mokrane, *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes*, Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. **99** (2004).

[Be] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication (1996), disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[Bo] S. Bosch, *Half a century of rigid analytic spaces*, Pure Appl. Math. Q., 5(4) : 1435-1467 (2009).

[BL] S. Bosch et W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, II. Flattening techniques*, Math. Ann. 296, 403-429 (1993).

[Bu] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Amer. Math. Soc. **16** (2002).

[Co] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. **124** (1996).

[FC] G. Faltings et C. L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete vol. **22**, Springer-Verlag (1990).

[Fa] L. Fargues, *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010).

[G1] U. Görtz, *On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL type*, Math. Ann. **321** (2001).

[G2] U. Görtz, *On the flatness of local models for the symplectic group*, Adv. in Math. **176** (2003).

[He] X. He, *Normality and Cohen-Macaulayness of local models of Shimura varieties*, Duke Math. J. 162 (2013), 2509 ?2523.

[Jo] C. Johansson, *Classicality for small slope overconvergent automorphic forms on some compact PEL Shimura varieties of type (C)*, Mathematische Annalen, vol. 357(1) (2013), 51-88.

[Ka] P. Kassaei, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. J. **132** (2006).

[Ki] R. Kiehl, *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inv. Math. **2** (1967).

[Ko] R. Kottwitz, *Points on Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992).

[La1] K.W. Lan, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, London Mathematical Society Monographs, vol. 36, Princeton University Press, Princeton (2013).

[La2] K.-W. Lan, *Higher Koecher's principle*, prépublication, à paraître à Math. Res. Lett. (2014).

[La3] K.W. Lan, *Compactifications of PEL-type Shimura varieties in ramified characteristics*, prépublication (2015).

[La4] K.W. Lan, *Integral models of toroidal compactifications with projective cone decompositions*, prépublication (2015).

[Pi] V. Pilloni, *Prolongement analytique sur les variétés de Siegel*, Duke Math. J. **157** (2011)

[PS] V. Pilloni et B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, prépublication (2011).

[Pin] R. Pink, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse de doctorat, universitéf de Bonn (1989).

[Sa] S. Sasaki, *Analytic continuation of overconvergent Hilbert eigenforms*, Compositio Math. **146** (2010).

[SGA1] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie SGA 1. Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics vol **224**, Springer (1971).

[St] B. Stroh, *Compactifications des variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, Bull. Soc. Math. France **138** (2010).

[Ti] Y. Tian, *Classicality of overconvergent Hilbert modular forms : case of quadratic inert degree*, prépublication, à paraître à Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova (2011).

[TX] Y. Tian et L. Xiao, *p-adic cohomology and classicality of overconvergent Hilbert modular forms*, prépublication (2012).

[We] T. Wedhorn, *Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL type*, Ann. Sci. école Norm. Sup. **32** (1999).

28 juin 2015

Stéphane Bijakowski, Vincent Pilloni et Benoît Stroh
Courriel : bijakows@math.univ-paris13.fr, vincent.pilloni@umpa.ens-lyon.fr, stroh@math.univ-paris13.fr, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France • CNRS, ENS Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie 69364 Lyon France
CNRS, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France